

ZGODNE Z  
USZCZUPLONĄ  
PODSTAWĄ  
PROGRAMOWĄ

WYDANIE  
UAKTUALNIONE

VADEMECUM



# Nowa teraz matura

## MATEMATYKA

● Poziom rozszerzony

- planer przygotowań
- treści dopasowane do matury
- sposoby na rozwiązywanie zadań
- podsumowania w formie graficznej

nowa  
era



# Spis treści

Co znajdziesz w Vademecum? .....	5
Planer .....	8
Wykaz używanych oznaczeń .....	10

## 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

1.1. Liczby rzeczywiste, własności liczb, przedziały liczbowe.....	12
1.2. Wartość bezwzględna .....	16
1.3. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych .....	18
1.4. Wyrażenia algebraiczne. Wzory skróconego mnożenia .....	20
Podsumowanie 1 .....	22
Zadania maturalne .....	24

## 2. Funkcje. Funkcja liniowa

2.1. Ogólne własności funkcji .....	26
2.2. Przekształcanie wykresu funkcji .....	30
2.3. Funkcja liniowa i jej własności .....	33
2.4. Równania i nierówności liniowe .....	35
2.5. Układy równań liniowych .....	40
Podsumowanie 2 .....	44
Zadania maturalne .....	46

## 3. Funkcja kwadratowa

3.1. Funkcja kwadratowa i jej własności .....	48
3.2. Równania i nierówności kwadratowe .....	53
3.3. Wzory Viète'a .....	57
3.4. Układy równań prowadzące do równań kwadratowych .....	60
3.5. Funkcja kwadratowa – zastosowania .....	62
Podsumowanie 3 .....	64
Zadania maturalne .....	66

## 4. Wielomiany

4.1. Wielomiany. Równość wielomianów .....	68
4.2. Dzielenie wielomianów. Rozkład wielomianu na czynniki .....	70
4.3. Równania wielomianowe .....	73
4.4. Nierówności wielomianowe .....	78
Podsumowanie 4 .....	80
Zadania maturalne .....	82

## 5. Funkcja wymierna

5.1. Funkcja wymierna i jej własności .....	84
5.2. Równania i nierówności wymierne .....	88
Podsumowanie 5 .....	92
Zadania maturalne .....	93

## 6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna

6.1. Funkcja wykładnicza i jej własności .....	94
6.2. Logarytm, własności logarytmów .....	97
6.3. Funkcja logarytmiczna i jej własności .....	99
Podsumowanie 6 .....	102
Zadania maturalne .....	103

## 7. Trygonometria

7.1. Funkcje trygonometryczne kąta $\alpha$ .....	104
7.2. Wartości funkcji trygonometrycznych .....	106
7.3. Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów oraz podwójnego kąta .....	108
7.4. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej .....	110
7.5. Równania trygonometryczne .....	113
Podsumowanie 7 .....	116
Zadania maturalne .....	119

SPRAWDŹ  
AKTUALNOŚCI CKEKod:  
X8E7AD

app.nowaterazmatura.pl

## 8. Ciągi

8.1. Ciąg liczbowy .....	120
8.2. Ciąg arytmetyczny i ciąg geometryczny .....	123
8.3. Granica ciągu .....	127
8.4. Szereg geometryczny .....	131
Podsumowanie 8 .....	134
Zadania maturalne .....	136

## 9. Planimetria

9.1. Figury przystające, figury podobne, twierdzenie Talesa .....	138
9.2. Twierdzenie Pitagorasa, twierdzenie sinusów, twierdzenie cosinusów .....	142
9.3. Kąty w okręgu, styczna do okręgu. Okrąg opisany na trójkącie, okrąg wpisany w trójkąt .....	144
9.4. Okrąg opisany na wielokącie, okrąg wpisany w wielokąt .....	149
9.5. Związki miarowe w wybranych figurach .....	153
Podsumowanie 9 .....	158
Zadania maturalne .....	160

## 10. Geometria analityczna

10.1. Długość odcinka, środek odcinka, wektory, przekształcenia płaszczyzny .....	162
10.2. Równanie prostej, wzajemne położenie dwóch prostych .....	166
10.3. Równanie okręgu .....	169
Podsumowanie 10 .....	174
Zadania maturalne .....	176

## 11. Stereometria

11.1. Proste i płaszczyzny. Wielościany .....	178
11.2. Pola i objętości graniastosłupów i ostrosłupów. Bryły podobne .....	183
11.3. Przekroje wielościanów .....	187
11.4. Bryły obrotowe .....	190
11.5. Pola powierzchni i objętości brył brył obrotowych .....	192
Podsumowanie 11 .....	196
Zadania maturalne .....	198

## 12. Rachunek różniczkowy

12.1. Granica funkcji .....	202
12.2. Ciągłość funkcji .....	206
12.3. Pochodna funkcji .....	208
12.4. Własności funkcji .....	213
12.5. Zagadnienia optymalizacyjne .....	218
Podsumowanie 12 .....	222
Zadania maturalne .....	224

## 13. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka

13.1. Statystyka .....	226
13.2. Elementy kombinatoryki .....	228
13.3. Prawdopodobieństwo klasyczne .....	231
13.4. Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite. Wzór Bayesa .....	234
13.5. Schemat Bernoulliego .....	238
Podsumowanie 13 .....	240
Zadania maturalne .....	244

Odpowiedzi .....	247
Indeks .....	263
Wartości funkcji trygonometrycznych .....	272

## Co znajdziesz w Vademecum?

Vademecum z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura” to kompendium wiedzy, które doskonale sprawdzi się podczas przygotowań do egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym. Z vademecum możesz uczyć się systematycznie: dokładnie powtarzać teorię, analizować przykładowo rozwiązane zadania, a następnie samodzielnie rozwiązywać analogiczne zadania oraz zestawy zadań w formie egzaminacyjnej. Dzięki quizom łatwiej przyswoisz wiadomości. Planer pozwoli ci zaplanować powtórki w odpowiednim czasie.

Poniżej przedstawiamy poszczególne elementy układu treści vademecum, a także stosowane w nim oznaczenia.



Na początku publikacji znajdziesz kod dostępu do aplikacji [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl). Zarejestruj się tam, aktywuj kod i korzystaj z zasobów cyfrowych do serii „NOWA Teraz matura”. Skanuj kody QR podczas pracy na urządzeniach mobilnych lub wpisz kody literowo-cyfrowe do aplikacji podczas pracy przy komputerze.

Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne	Funkcja. Funkcja liniowa	Funkcja kwadratowa	Wielomiany
WRZESIEŃ		PAŹDZIERNIK	

*Planer maturalny* to połączenie spisu treści vademecum z kalendarzem. Ułatwia samodzielne zaplanowanie powtórki całego materiału i motywuje do systematycznej pracy. Możesz w nim odhaczać zrealizowane tematy i odliczać czas pozostały do egzaminu.

### 3.1. Funkcja kwadratowa i jej własności

**Funkcja kwadratowa** zmiennej  $x \in \mathbb{R}$  to funkcja opisana  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b, c \in \mathbb{R}$ . Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb

Każdy dział jest podzielony na krótkie tematy, które zaczynają się od zwięzłego wstępu teoretycznego. Wyróżniliśmy go kolorowym tłem.



Oznaczenie *Quiz z teorii* na początku tematu to odsyłacz do quizu składającego się z kilku zadań testowych. Możesz go rozwiązać zamiast czytania teorii. Seria pytań skutecznie sprawdzi twoją wiedzę teoretyczną i **ułatwi zapamiętanie** podstawowych reguł i wzorów.

### ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI

	$\Delta$	$=$	$b^2$	$-$	$4ac$

*Zadania z rozwiązaniami* są dobrane tak, aby można było przeanalizować najbardziej **typowe zadania** z danego tematu. Ich rozwiązania są opatrzone komentarzami, które wyjaśniają konieczne założenia, poszczególne etapy rozwiązania czy wybór najlepszej metody.

Dopiski na marginesach przypominają w odpowiednich momentach kluczowe **definicje** i **wzory** matematyczne oraz zwracają uwagę na istotne kwestie.

## ZADANIA

*Zadania* zamieszczone bezpośrednio pod *Zadaniami z rozwiązaniami* pozwalają sprawdzić, jak sobie radzisz z zadaniami analogicznymi do omówionych.

→ **Odpowiedzi**  
s. 222

Odsyłacz do strony, na której znajdują się krótkie **odpowiedzi** do *Zadań*.


Kratka na marginesie zachęca do robienia własnych notatek, dzięki którym vademecum nabierze indywidualnego charakteru.

## Podsumowanie 3

*Podsumowania* to wybrane informacje z poszczególnych działów przedstawione w formie plakatów, map myśli, schematów. Ułatwiają zapamiętywanie zależności bądź skojarzenie niektórych własności. Część informacji musisz uzupełnić samodzielnie.

### Quiz z teorii



app.nowa  
terazmatura.pl  
**Kod: D7LNCX**

Oznaczenie *Quiz z teorii* umieszczone przy *Podsumowaniu* to odsyłacz do quizu, składającego się z kilkunastu zadań testowych dotyczących teorii z danego działu.

### Film – rozwiązanie zadania



app.nowa  
terazmatura.pl  
**Kod: 53RP5V**

**Rozwiązania filmowe** do wybranych zagadnień z *Podsumowania* prezentują youtuberzy: Marcin, prowadzący kanał Matma z pasją, oraz MiedzianyFisor.

### Podsumowanie – uzupełnione odpowiedzi



app.nowa  
terazmatura.pl  
**Kod: H8N7HN**

Kod QR umieszczony na zakończenie *Podsumowań* działów kieruje do pliku PDF z uzupełnionymi lukami. Komplet takich graficznych podsumowań możesz wydrukować i powiesić w pobliżu miejsca nauki.

## Zadania maturalne

*Zadania maturalne* na końcu każdego działu to zadania skonstruowane na wzór zadań egzaminacyjnych CKE lub wybrane oryginalne zadania CKE.



Odkaz do publikacji CKE „Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki”, z której można korzystać podczas egzaminu. Warto tę publikację wydrukować i zaglądać do niej systematycznie, aby przyzwyczaić się do układu i zakresu prezentowanych w niej treści.

CKE maj 2021 PR

Oznaczenie zadania, które wystąpiło na maturze w poprzednich latach lub w materiałach CKE i pasuje także do obecnych wymagań egzaminacyjnych dla poziomu rozszerzonego.

## Odpowiedzi

Dzięki krótkim odpowiedziom można **szybko sprawdzić** końcowy wynik każdego zadania.



Kody QR umieszczone w części *Odpowiedzi* kierują do plików PDF z pełnymi rozwiązaniami **wszystkich** zadań z vademecum.

## Indeks

*Indeks* znajduje się na końcu publikacji. Umożliwia szybkie dotarcie do szukanego pojęcia lub zagadnienia.



Aby nabrać biegłości w rozwiązywaniu zadań maturalnych, warto sięgnąć po zbiór zadań maturalnych z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura”. Układy treści vademecum i zbioru zadań maturalnych są ze sobą ściśle skorelowane.



Osiągnięcie najwyższej formy przed egzaminem zapewnią arkusze maturalne z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura”. Pracę z arkuszami polecamy na zakończenie przygotowań do matury, gdy całość powtórzenia masz już za sobą.

## Wykaz używanych oznaczeń

$\Leftrightarrow$	wtedy i tylko wtedy, gdy
$\in; \notin$	należy; nie należy
$A \subset B$	zbiór $A$ jest podzbiorem zbioru $B$ (zbiór $A$ jest zawarty w zbiorze $B$ )
$a \in A$	element $a$ należy do zbioru $A$ ( $a$ jest elementem zbioru $A$ )
$\emptyset$	zbiór pusty; zdarzenie niemożliwe
$A \cup B$	suma zbiorów $A$ i $B$
$A \cap B$	część wspólna (iloczyn) zbiorów $A$ i $B$
$A \setminus B$	różnica zbiorów $A$ i $B$
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$	zbiory liczb: naturalnych, całkowitych, wymiernych, rzeczywistych
$\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_-$	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich; zbiór liczb rzeczywistych ujemnych
$(a; b); [a; b]$	przedział otwarty, przedział domknięty
$[a; b); (a; b]$	przedział lewostronnie domknięty; przedział prawostronnie domknięty
$f; f(x)$	funkcja $f$ ; wartość funkcji $f$ dla argumentu $x$
$D; ZW$	dziedzina funkcji; zbiór wartości funkcji
$(a_n); a_n$	ciąg; $n$ -ty wyraz ciągu ( $a_n$ )
$\lim_{x \rightarrow \infty} a_n$	granica ciągu ( $a_n$ )
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	granica funkcji $f$ w $-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	granica funkcji $f$ w punkcie $x_0$
$S_n; S$	suma $n$ początkowych wyrazów ciągu; suma szeregu geometrycznego
$o(S, r)$	okrąg o środku $S$ i promieniu $r$
$AB;  AB $	odcinek o końcach $A$ i $B$ ; długość odcinka $AB$
$\overrightarrow{AB};  \overrightarrow{AB} $	wektor o początku $A$ i końcu $B$ ; długość wektora $\overrightarrow{AB}$
$F_1 \sim F_2$	figura $F_1$ jest podobna do figury $F_2$
$F_1 \equiv F_2$	figura $F_1$ jest przystająca do figury $F_2$
$\vec{u} = [a, b]$	wektor $\vec{u}$ o współrzędnych $a, b$
$a \parallel b; a \perp b$	prosta $a$ jest równoległa do prostej $b$ ; prosta $a$ jest prostopadła do prostej $b$
$\Omega$	zbiór zdarzeń elementarnych
$A; A'$	zdarzenie $A$ ; zdarzenie $A'$ przeciwne do zdarzenia $A$
$P(A)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$
$P(A B)$	prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $A$ pod warunkiem zajścia zdarzenia $B$
$n!$	silnia liczby $n$
$\binom{n}{k}$	symbol Newtona
$\bar{x}; \bar{x}_w$	średnia wyników; średnia ważona wyników

# Powtórzenie przed maturą

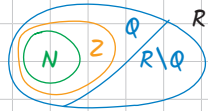
# 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

## Quiz z teorii



Kod: ZD5URJ

app.nowaterazmatura.pl



$X \subset A$ :  $X$  jest podzbiorem zbioru  $A$

$x \in A$ :  $x$  należy do zbioru  $A$

Liczby 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

## 1.1. Liczby rzeczywiste, własności liczb, przedziały liczbowe

### Podzbiory zbioru $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych

- zbiór liczb naturalnych:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- zbiór liczb całkowitych:  $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- zbiór liczb wymiernych:  $\mathbb{Q}$
- zbiór liczb niewymiernych:  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Dodatkowe oznaczenia:

$\mathbb{N}_+$  – zbiór liczb naturalnych dodatnich

$\mathbb{Z}_-$  – zbiór liczb całkowitych ujemnych

$\mathbb{Q}_+$  – zbiór liczb wymiernych dodatnich

$\mathbb{Q}_-$  – zbiór liczb wymiernych ujemnych

$\mathbb{R}_+$  – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich

$\mathbb{R}_-$  – zbiór liczb rzeczywistych ujemnych

**Liczba wymierna** to liczba, którą można przedstawić w postaci  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{Z}$  i  $q \neq 0$ .

Każda liczba wymierna ma rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe, np.  $\frac{1}{8} = 0,125$ ,  $\frac{1}{9} = 0,(1)$ .

Każda **liczba niewymierna** ma rozwinięcie dziesiętne nieskończone i nieokresowe, np.  $\sqrt{2} = 1,414213\dots$ ,  $\pi = 3,141592\dots$

### Podzielność w zbiorze liczb naturalnych. Liczby pierwsze

Dla dowolnej pary liczb  $w \in \mathbb{N}$  i  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  istnieje dokładnie jedna para liczb  $n, r \in \mathbb{N}$  taka, że  $w = nd + r$  i  $r < d$ .

Liczbę  $r$  nazywamy **resztą z dzielenia** liczby  $w$  przez  $d$ .

Jeżeli  $r = 0$ , to mówimy, że liczba  $w$  jest **podzielna** przez liczbę  $d$  albo że  $d$  jest **dzielnikiem** liczby  $w$ .

Zapis  $d|w$  oznacza, że liczba  $d$  jest dzielnikiem liczby  $w$ .

**Liczbą pierwszą** nazywamy każdą liczbę naturalną większą od jedności, której jedynymi dzielnikami są jeden i ona sama.

**Liczbą złożoną** jest każda liczba naturalna większa od jedności, która nie jest liczbą pierwszą.

### Działania na zbiorach

Element  $x$  należy do sumy zbiorów  $A$  i  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy należy przynajmniej do jednego ze zbiorów  $A$  lub  $B$ :

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ lub } x \in B)$$

Element  $x$  należy do iloczynu (części wspólnej) zbiorów  $A$  i  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy należy do każdego ze zbiorów  $A$  i  $B$ :

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } x \in B)$$

Element  $x$  należy do różnicy zbiorów  $A$  i  $B$  wtedy i tylko wtedy, gdy należy do zbioru  $A$  i nie należy do zbioru  $B$ :

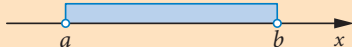
$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A \text{ i } x \notin B)$$

## Przedziały liczbowe

Założmy, że  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $a < b$ .

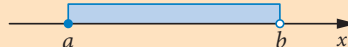
### Przedziały liczbowe ograniczone

$$x \in (a; b) \Leftrightarrow a < x < b$$



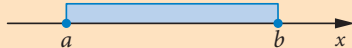
otwarty

$$x \in [a; b) \Leftrightarrow a \leq x < b$$



lewostronnie domknięty

$$x \in [a; b] \Leftrightarrow a \leq x \leq b$$



domknięty

$$x \in (a; b] \Leftrightarrow a < x \leq b$$



prawostronnie domknięty

### Przedziały liczbowe nieograniczone

$$x \in (-\infty; a) \Leftrightarrow x < a$$



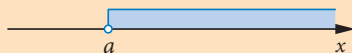
otwarty

$$x \in (-\infty; a] \Leftrightarrow x \leq a$$



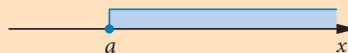
prawostronnie domknięty

$$x \in (a; \infty) \Leftrightarrow x > a$$



otwarty

$$x \in [a; \infty) \Leftrightarrow x \geq a$$



lewostronnie domknięty

## ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Wykaż prawdziwość zdania.

- a) Jeśli  $p$  jest liczbą pierwszą, to liczba  $p^2 - p + 2$  nie jest liczbą pierwszą.  
 b) Dla dowolnej liczby  $k \in \mathbb{N}$  liczba  $k^2 + k + 17$  jest liczbą nieparzystą.

### Rozwiązanie

a)  $p^2 - p + 2 = p(p - 1) + 2$

$p(p - 1) \geq 2$  – iloczyn  $p(p - 1)$  dla dowolnej liczby pierwszej  $p$  jest liczbą parzystą równą co najmniej 2

Liczby  $p$  i  $p - 1$  są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc jedna z nich jest parzysta.

Zatem:

$p(p - 1) + 2$  jest liczbą parzystą i  $p(p - 1) + 2 \geq 4$ , czyli nie jest to liczba pierwsza.

To kończy dowód.

b)  $k^2 + k + 17 = k(k + 1) + 17$

$k(k + 1)$  – liczba parzysta jako iloczyn liczb parzystej i nieparzystej

Liczby  $k$  i  $k + 1$  są kolejnymi liczbami naturalnymi, więc jedna z nich jest parzysta.

$k(k + 1) + 17$  – liczba nieparzysta jako suma liczb parzystej i nieparzystej

To kończy dowód.

Liczba 2 to jedyna liczba parzysta wśród liczb pierwszych.

2. Wykaż, że iloczyn kwadratów trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 36.

**Rozwiązanie**

$n - 1, n, n + 1$  – trzy kolejne liczby naturalne

$(n - 1)^2 n^2 (n + 1)^2 = ((n - 1)n(n + 1))^2$  – iloczyn kwadratów liczb jest równy kwadratowi iloczynu tych liczb

Wśród trzech kolejnych liczb naturalnych jest jedna podzielna przez 3 i przynajmniej jedna podzielna przez 2, więc iloczyn tych liczb jest podzielny przez  $2 \cdot 3 = 6$ . Zatem kwadrat iloczynu tych trzech liczb jest podzielny przez  $6^2$ . To kończy dowód.

3. Wykaż, że jeżeli przy dzieleniu przez 9 liczba naturalna  $a$  daje resztę 3, a liczba naturalna  $b$  – resztę 5, to reszta z dzielenia przez 9 iloczynu liczb  $a$  i  $b$  jest równa 6.

**Rozwiązanie**

$$a = 9n + 3 \text{ i } n \in \mathbb{N}$$

$$b = 9k + 5 \text{ i } k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} ab &= (9n + 3)(9k + 5) = \\ &= 81nk + 45n + 27k + 15 = \\ &= 9(9nk + 5n + 3k + 1) + 6 \end{aligned}$$

$n, k \in \mathbb{N}$ , więc  $(9nk + 5n + 3k + 1) \in \mathbb{N}$ , zatem reszta z dzielenia iloczynu  $ab$  przez 9 wynosi 6.

To kończy dowód.

Przedstawiamy liczby  $a$  i  $b$  w postaci  $w = nd + r$  dla  $d = 9$  i  $r = 3$  oraz  $r = 5$ .

Zapisujemy iloczyn liczb  $a, b$  i przekształcamy go do postaci  $9l + r$ , gdzie  $l \in \mathbb{N}$  i  $r < 9$ .

4. Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru  $a$ , dla których wartość wyrażenia  $\frac{a-3}{a+2}$  jest liczbą całkowitą.

**Rozwiązanie**

$$\frac{a-3}{a+2} = \frac{a+2-5}{a+2} = 1 - \frac{5}{a+2} \quad (\text{dla } a \neq -2)$$

Wyrażenie  $1 - \frac{5}{a+2}$  przyjmie wartość całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy  $a + 2$  będzie dzielnikiem liczby 5.

Zatem:

$$a + 2 = 1 \text{ lub } a + 2 = -1 \text{ lub } a + 2 = 5 \text{ lub } a + 2 = -5$$

$$\text{Odp. } a = -1, a = -3, a = 3, a = -7$$

5. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów zbiór rozwiązań układu nierówności:

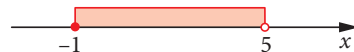
$$\begin{cases} 3x + 5 \geq 2x + 4 \\ x + 2 > 3x - 8 \end{cases}$$

**Rozwiązanie**

$$\begin{cases} 3x + 5 \geq 2x + 4 \\ x + 2 > 3x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x < 5 \end{cases}$$

$$\text{Odp. } [-1; 5)$$



$$\begin{array}{c} 2/w \text{ i } 3/w \\ \updownarrow \\ 6/w \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \in A \cap B \\ \updownarrow \\ (x \in A \text{ i } x \in B) \end{array}$$

6. Ile liczb całkowitych należy do różnicy przedziałów  $[\pi - \sqrt{15}; \sqrt[3]{64}] \setminus [\sqrt[3]{200} - 7; 7\pi - 20]$ ?

**Rozwiązanie**

$$[\pi - \sqrt{15}; \sqrt[3]{64}]$$

$$-1 < \pi - \sqrt{15} < 0$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$[\sqrt[3]{200} - 7; 7\pi - 20]$$

$$5 < \sqrt[3]{200} < 6$$

$$-2 < \sqrt[3]{200} - 7 < -1$$

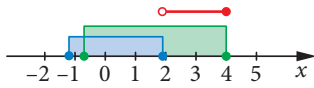
$$7\pi - 20 \approx 1,99$$

$$1 < 7\pi - 20 < 2$$

Ustalamy, między którymi liczbami całkowitymi leży na osi liczbowej lewy koniec przedziału  $[\pi - \sqrt{15}; \sqrt[3]{64}]$ .

Ustalamy, między którymi liczbami całkowitymi leżą na osi liczbowej końce przedziału  $[\sqrt[3]{200} - 7; 7\pi - 20]$ .

$$\text{Zatem: } [\pi - \sqrt{15}; \sqrt[3]{64}] \setminus [\sqrt[3]{200} - 7; 7\pi - 20] = (7\pi - 20; \sqrt[3]{64}]$$



Liczby 2, 3 i 4 należą do różnicy rozważanych przedziałów.

Odp. trzy liczby

7. Zapisz w postaci ułamka zwykłego.

a)  $0,(4)$

b)  $0,(217)$

**Rozwiązanie**

a)  $0,(4) = a$

$$0,4 + 0,0(4) = a \quad | \cdot 10$$

$$4 + 0,(4) = 10a$$

$$4 + a = 10a$$

$$a = \frac{4}{9}$$

b)  $0,(217) = a$

$$0,217 + 0,000(217) = a \quad | \cdot 1000$$

$$217 + 0,(217) = 1000a$$

$$217 + a = 1000a$$

$$a = \frac{217}{999}$$

Odp. a)  $0,(4) = \frac{4}{9}$ , b)  $0,(217) = \frac{217}{999}$

$$\pi \approx 3,14$$

Patrz też zadanie 1

s. 131 w temacie

„Szereg geometryczny”.

$$\begin{aligned} 0,(4) &= 0,44444\dots = \\ &= 0,4 + 0,0444\dots = \\ &= 0,4 + 0,0(4) \end{aligned}$$

**ZADANIA**

- Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $\frac{(n-7)(n-2)(n+5)(n+18)}{4}$  jest liczbą całkowitą.
- Wykaż, że iloczyn pięciu kolejnych liczb naturalnych jest liczbą podzielną przez 120.
- Liczba naturalna  $k$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę 4, a liczba naturalna  $p$  przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 iloczynu liczb  $k$  i  $p$ .
- Dla jakich całkowitych wartości parametru  $a$  wartość wyrażenia  $\frac{a+5}{a-1}$  jest liczbą całkowitą?
- Zapisz w postaci przedziału lub sumy przedziałów i zaznacz na osi liczbowej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych  $x$ , które jednocześnie spełniają obie nierówności  $0,5x - 2 \leq \frac{x-7}{8}$  oraz  $\frac{2x-1}{3} < \frac{7x+1}{12}$ .
- Do którego z przedziałów:  $(11 - \sqrt[3]{124}; \sqrt[4]{257} + 3)$  czy  $(-2 - \sqrt{\pi}; \sqrt{10\pi} + 3)$  należy więcej liczb całkowitych?
- Zapisz w postaci ułamka zwykłego.
 

a)  $0,(12)$                       b)  $0,0(7)$                       c)  $0,3(18)$

→ Odpowiedzi  
s. 248

## Quiz z teorii

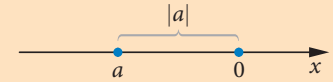


Kod: WDLVLV

app.nowaterazmatura.pl

## 1.2. Wartość bezwzględna

Wartością bezwzględną liczby  $a$  nazywamy odległość odpowiadającego jej punktu na osi liczbowej od punktu o współrzędnej 0, mierzoną w odcinkach jednostkowych.



## Własności wartości bezwzględnej

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

$$|a| = |-a| \quad \text{w szczególności} \quad |a - b| = |b - a|$$

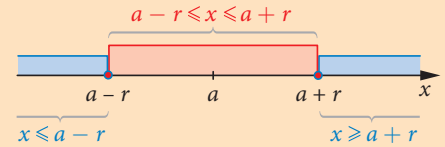
$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad |a - b| \leq |a| + |b| \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{dla } b \neq 0$$

Dla  $a \in \mathbb{R}$  i  $r \geq 0$ :

$$|x - a| = r \Leftrightarrow x = a - r \text{ lub } x = a + r$$

$$|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$$

$$|x - a| \geq r \Leftrightarrow x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r$$



Odległość między punktami odpowiadającymi na osi liczbom  $a$  i  $b$  wyraża się wzorem  $|a - b|$ .

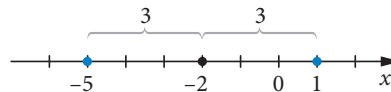
## ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI

1. Rozwiąż graficznie równanie  $|x + 2| = 3$ .

## Rozwiązanie

$$|x + 2| = 3$$

$$|x - (-2)| = 3$$

Odp.  $x = -5$  lub  $x = 1$ 

Zapisujemy równanie w takiej postaci, aby można było wykorzystać geometryczną interpretację wyrażenia  $|a - b|$ .

Szukamy punktów  $x$ , których odległość od punktu  $-2$  jest równa  $3$ .

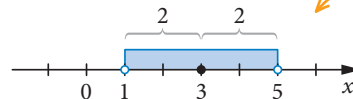
2. Rozwiąż graficznie nierówność.

a)  $|x - 3| < 2$

b)  $|2 - x| \geq 4$

## Rozwiązanie

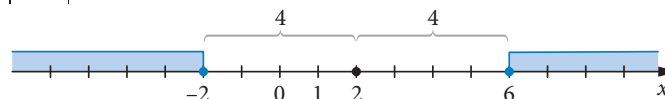
a)  $|x - 3| < 2$

Odp.  $x \in (1; 5)$ 

Szukamy punktów  $x$ , których odległość od punktu  $3$  jest mniejsza od  $2$ .

b)  $|2 - x| \geq 4$

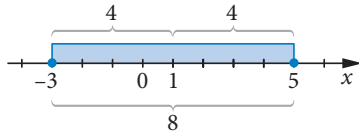
$$|x - 2| \geq 4$$

Odp.  $x \in (-\infty; -2] \cup [6; \infty)$ 

Szukamy punktów  $x$ , których odległość od punktu  $2$  jest nie mniejsza od  $4$ .

$$|a - b| = |b - a|$$

3. Zapisz w postaci  $|x - a| \leq b$  nierówność z niewiadomą  $x$ , której zbiorem rozwiązań jest przedział  $[-3; 5]$ .

**Rozwiązanie**

Odległość między końcami przedziału  $[-3; 5]$  jest równa 8. Punktem oddalonym od  $-3$  i od  $5$  o połowę tej odległości, czyli o  $4$ , jest liczba  $1$ .

Zatem:  $a = 1, b = 4$

Odp.  $|x - 1| \leq 4$

4. Zapisz podaną liczbę, nie używając symbolu wartości bezwzględnej.

a)  $|\sqrt{17} - 3\sqrt{2}| + |4 - \sqrt{17}|$       b)  $||5 - 2\sqrt{7}| - \sqrt{7}|$

**Rozwiązanie**

a)  $|\sqrt{17} - 3\sqrt{2}| + |4 - \sqrt{17}| = |\sqrt{17} - \sqrt{18}| + |4 - \sqrt{17}| =$   
 $= -(\sqrt{17} - \sqrt{18}) - (4 - \sqrt{17}) = -\sqrt{17} + \sqrt{18} - 4 + \sqrt{17} = 3\sqrt{2} - 4$

b)  $||5 - 2\sqrt{7}| - \sqrt{7}| = |-(5 - 2\sqrt{7}) - \sqrt{7}| =$   
 $= |-5 + 2\sqrt{7} - \sqrt{7}| = |-5 + \sqrt{7}| = 5 - \sqrt{7}$

Odp. a)  $3\sqrt{2} - 4$ , b)  $5 - \sqrt{7}$

5. Wykaż, że liczba  $\left| \frac{|-\sqrt{7}-1|}{|\sqrt{7}+3|} - |1-\sqrt{7}| \right|$  jest liczbą naturalną.

**Rozwiązanie**

$$\left| \frac{|-\sqrt{7}-1|}{|\sqrt{7}+3|} - |1-\sqrt{7}| \right| = \left| \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+3} + (1-\sqrt{7}) \right| =$$

$$= \left| \frac{\sqrt{7}+1+(1-\sqrt{7})(\sqrt{7}+3)}{\sqrt{7}+3} \right| = \left| \frac{\sqrt{7}+1+\sqrt{7}+3-7-3\sqrt{7}}{\sqrt{7}+3} \right| =$$

$$= \left| \frac{-\sqrt{7}-3}{\sqrt{7}+3} \right| = |-1| = 1$$

To kończy dowód.

$$\sqrt{17} - \sqrt{18} < 0$$

$$4 - \sqrt{17} < 0$$

$$5 - 2\sqrt{7} = \sqrt{25} - \sqrt{28}$$

$$\begin{aligned} | -a - b | &= \\ &= | -(a + b) | = \\ &= | a + b | \end{aligned}$$

**ZADANIA**

- Rozwiąż graficznie równanie  $5|x + 3| = 15$ .
- Rozwiąż graficznie nierówność.
  - $|x + 1| \leq 6$
  - $|6 - x| > 1$
- Zapisz w postaci  $|x - a| < b$  nierówność z niewiadomą  $x$ , której zbiorem rozwiązań jest przedział  $(-5; 9)$ .
- Zapisz liczbę  $|2\sqrt{5} - 3\sqrt{3}| + |3\sqrt{5} - 4\sqrt{2}| - |7\sqrt{2} - 6\sqrt{3}|$ , nie używając symbolu wartości bezwzględnej.
- Wykaż, że liczba  $\frac{|2\pi - 7|}{3} - \frac{|13 - 4\pi|}{6}$  jest liczbą wymierną.

→ Odpowiedzi  
s. 248

## Quiz z teorii



Kod: QGGJN7

app.nowaterazmatura.pl

## 1.3. Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

## Potęga o wykładniku naturalnym

Założmy, że  $n$  jest liczbą naturalną dodatnią. Wówczas  $n$ -tą potęgę liczby rzeczywistej  $a$  definiujemy następująco:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$$

Pierwiastek  $n$ -tego stopnia

- Jeżeli  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  i  $n$  jest dodatnią liczbą parzystą oraz  $b^n = a$ , to  $b = \sqrt[n]{a}$ .
- Jeżeli  $n$  jest liczbą nieparzystą większą od 1 i  $b^n = a$ , to  $b = \sqrt[n]{a}$ .

## Własności pierwiastków

 $n$  – liczba parzysta

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n \quad \text{dla } a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b \geq 0$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{dla } a \geq 0 \text{ i } b > 0$$

 $n$  – liczba nieparzysta

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{dla } b \neq 0$$

## Potęga o wykładniku rzeczywistym

Potęga o wykładniku całkowitym  
(dla  $a \neq 0$ )

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

## Potęga o wykładniku wymiernym

$$\frac{1}{a^n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{dla } a \geq 0, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$\frac{k}{a^n} = \sqrt[n]{a^k} \quad \text{dla } a \geq 0, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^k}} \quad \text{dla } a > 0, n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

Dla każdej liczby  $a \in \mathbb{R}_+$  i każdej liczby  $r \in \mathbb{R}$  jest jednoznacznie określona potęga  $a^r$ .

## Własności potęg

Jeżeli  $a, b \in \mathbb{R}_+$  i  $p, r \in \mathbb{R}$ , to:

$$a^p \cdot a^r = a^{p+r} \quad \text{iloczyn potęg o tych samych podstawach}$$

$$\frac{a^p}{a^r} = a^{p-r} \quad \text{iloraz potęg o tych samych podstawach}$$

$$(a^p)^r = a^{p \cdot r} \quad \text{potęga potęgi}$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \quad \text{potęga iloczynu}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \quad \text{potęga ilorazu}$$

## ZADANIA Z ROZWIĄZANAMI

1. Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{3^{-2} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}{4\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{9^{-\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{27}}$ .

## Rozwiązanie

$$\frac{3^{-2} \cdot 81^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}{4\sqrt{9} \cdot \sqrt[3]{9^{-\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{27}} = \frac{3^{-2} \cdot (3^4)^{\frac{3}{4}} \cdot 9}{4\sqrt{3^2} \cdot \sqrt[3]{(3^2)^{-\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{3^3}} = \frac{3^{-2} \cdot 3^3 \cdot 3^2}{3 \cdot 4 \cdot \sqrt[3]{3^{-3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^{-2+3+2}}{3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{-1} \cdot 3^{\frac{3}{2}}} = \frac{3^3}{3^{\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}}} = \frac{3^3}{3} = 9$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

2. Zapisz liczbę  $\frac{6^{48} - 9^{30}}{12^{24} - 27^{12}}$  w postaci potęgi liczby 3.

**Rozwiązanie**

$$\frac{6^{48} - 9^{30}}{12^{24} - 27^{12}} = \frac{(2 \cdot 3)^{48} - (3^2)^{30}}{(2^2 \cdot 3)^{24} - (3^3)^{12}} = \frac{2^{48} \cdot 3^{48} - 3^{60}}{2^{48} \cdot 3^{24} - 3^{36}} = \frac{3^{48}(2^{48} - 3^{12})}{3^{24}(2^{48} - 3^{12})} = 3^{24}$$

3. Wykaż, że liczba  $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$  jest całkowita.

**Rozwiązanie**

$$\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} = \sqrt{19 + 2 \cdot 4\sqrt{3}} = \sqrt{4^2 + 2 \cdot 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(4 + \sqrt{3})^2} = 4 + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2 \cdot 5\sqrt{3}} = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{(5 - \sqrt{3})^2} = |5 - \sqrt{3}| = 5 - \sqrt{3}$$

Zatem:  $\sqrt{19 + 8\sqrt{3}} + \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = 4 + \sqrt{3} + 5 - \sqrt{3} = 9$  To kończy dowód.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ \sqrt{a^2} &= |a|\end{aligned}$$

4. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi liczby pierwszej o wykładniku wymiernym.

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{7^2} \cdot (\sqrt[4]{7})^3}$

b)  $32\sqrt[3]{4\sqrt{2}}$

**Rozwiązanie**

a)  $\sqrt[3]{\sqrt{7^2} \cdot (\sqrt[4]{7})^3} = (7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{17}{24}}$

b)  $32\sqrt[3]{4\sqrt{2}} = 2^5 \cdot (2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{35}{6}}$

5. Wykaż, że nierówność  $2^{952} > 3^{595}$  jest prawdziwa.

**Rozwiązanie**

$$2^{952} = 2^{119 \cdot 8} = (2^8)^{119} = 256^{119}$$

$$3^{595} = 3^{119 \cdot 5} = (3^5)^{119} = 243^{119}$$

Zapisujemy obie liczby w postaci potęg o tych samych wykładnikach.

$256 > 243$ , więc  $256^{119} > 243^{119}$  To kończy dowód.

6. Wykaż, że jeżeli  $n \in \mathbb{N}$ , to liczba  $2^{3n+3} - 3^{2n+1} - 3 \cdot 8^n + 8 \cdot 9^n$  jest podzielna przez 5.

**Rozwiązanie**

$$2^{3n+3} - 3^{2n+1} - 3 \cdot 8^n + 8 \cdot 9^n = 2^3 \cdot 2^{3n} - 3 \cdot 3^{2n} - 3 \cdot 2^{3n} + 8 \cdot 3^{2n} = 5(2^{3n} + 3^{2n})$$

$(2^{3n} + 3^{2n}) \in \mathbb{N}$ , więc liczba 5 jest dzielnikiem rozważanej liczby. To kończy dowód.

**ZADANIA**

→ Odpowiedzi  
s. 248

1. Oblicz wartość wyrażenia.

a)  $\frac{1}{6} + \{1 + [6 \cdot (1 + 5^{-1})^{-1}]^{-1}\}^{-1}$

b)  $\frac{7^{-2} \cdot 343^{-\frac{2}{3}} \cdot (\frac{1}{7})^2}{7^{-3} \cdot \sqrt[3]{49^{-\frac{3}{2}}}}$

2. Wykaż, że liczba  $\frac{72^6 + 3^5 \cdot 6^7}{24^5 + 3 \cdot 6^4}$  jest naturalna.

3. Wykaż, że liczba  $\sqrt{14 - 6\sqrt{5}} + \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$  jest całkowita.

4. Zapisz podaną liczbę w postaci potęgi liczby pierwszej o wykładniku wymiernym.

a)  $\sqrt[4]{9\sqrt{3}\sqrt[5]{27}}$

b)  $\frac{25 \cdot \sqrt[3]{5\sqrt{125}}}{\sqrt{125\sqrt[4]{5}}}$

5. Wykaż, że nierówność  $2^{910} > 5^{390}$  jest prawdziwa.

6. Wykaż, że liczba  $2^{72} + 4^{37} + 8^{25}$  jest podzielna przez 13.

## Quiz z teorii



Kod: AWA5ST

app.nowaterazmatura.pl

## 1.4. Wyrażenia algebraiczne. Wzory skróconego mnożenia

## Wzory skróconego mnożenia

Jeżeli  $a, b$  są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	kwadrat sumy
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	kwadrat różnicy
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	różnica kwadratów
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	sześcian sumy
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	sześcian różnicy
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	różnica sześciątów
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	suma sześciątów
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^{n-k} + \dots + a + 1)$	

## ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Wiedząc, że  $a + b = -\sqrt{2}$  i  $ab = -5$ , oblicz  $a^3 + b^3$ .

## Rozwiązanie

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\ &= (a + b)((a^2 + b^2) - ab) = && \text{Przekształcamy wyrażenie } a^3 + b^3 \text{ do takiej} \\ &= (a + b)((a + b)^2 - 2ab - ab) = (a + b)((a + b)^2 - 3ab) && \text{postaci, w której wystąpią } a + b \text{ i } ab. \\ \text{Zatem: } a^3 + b^3 &= -\sqrt{2}((-\sqrt{2})^2 + 3 \cdot 5) = -17\sqrt{2} \\ \text{Odp. } a^3 + b^3 &= -17\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Wykaż, że  $(a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b - c)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2)$ .

## Rozwiązanie

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= [(a + b) + c]^2 = && \text{Wyprowadzamy wzór na kwadrat sumy} \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b) \cdot c + c^2 = && \text{trzech wyrażen } (a + b + c)^2, \text{ korzystając} \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 && \text{ze wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażen.} \\ \text{Czyli: } (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ \text{Zatem:} \\ (a - b + c)^2 &= (a + (-b) + c)^2 = && \text{Stosujemy wyprowadzony wzór.} \\ &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2ac + 2(-b)c = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc \\ (a + b - c)^2 &= (a + b + (-c))^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc \\ (a - b - c)^2 &= (a + (-b) + (-c))^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc \\ L &= (a + b + c)^2 + (a - b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b - c)^2 = \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + \\ &+ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc + && \text{Podstawiamy w dowodzonej równości} \\ &+ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + && \text{wyznaczone wyrażenia.} \\ &+ a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc = \\ &= 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2) = P \quad \text{To kończy dowód.} \end{aligned}$$

3. Wykaż, że liczba  $43^5 - 6^{10}$  jest podzielna przez 7.

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned}
 43^5 - 6^{10} &= 43^5 - (6^2)^5 = 43^5 - 36^5 = \\
 &= (43 - 36)(43^4 + 43^3 \cdot 36 + 43^2 \cdot 36^2 + 43 \cdot 36^3 + 36^4) = \\
 &= 7 \cdot (43^4 + 43^3 \cdot 36 + 43^2 \cdot 36^2 + 43 \cdot 36^3 + 36^4) \\
 (43^4 + 43^3 \cdot 36 + 43^2 \cdot 36^2 + 43 \cdot 36^3 + 36^4) &\in \mathbb{N}, \text{ więc liczba } 43^5 - 6^{10} \text{ jest podzielna przez 7.} \\
 &\text{To kończy dowód.}
 \end{aligned}$$

← Stosujemy wzór na  $a^n - b^n$ .

4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^2$  albo jest podzielna przez 4, albo daje z dzielenia przez 4 resztę równą 1.

**Rozwiązanie**

Każda liczba naturalna  $n$  jest parzysta albo nieparzysta, można więc ją zapisać w jednej z dwóch postaci:

$$\text{I. } n = 2k \quad \text{lub} \quad \text{II. } n = 2k + 1 \quad (\text{gdzie } k \in \mathbb{N})$$

Wówczas:

$$\text{I. } n^2 = 4k^2 \quad \text{lub} \quad \text{II. } n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4(k^2 + k)}_{4 \mid 4(k^2 + k)} + 1$$

czyli  $4 \mid n^2$

$k \in \mathbb{N}$ , więc  $(k^2 + k) \in \mathbb{N}$ , zatem reszta z dzielenia  $n^2$  przez 4 wynosi 1.

To kończy dowód.

5. Wykaż, że dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$  prawdziwa jest nierówność  $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$ .

**Rozwiązanie**

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 + 2 &\geq 2(a + b) && \leftarrow \text{Aby udowodnić podaną nierówność,} \\
 a^2 + b^2 + 2 &\geq 2a + 2b && \text{przekształcamy ją równoważnie.} \\
 a^2 - 2a + b^2 - 2b + 2 &\geq 0 \\
 (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) &\geq 0 \\
 (a - 1)^2 + (b - 1)^2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Suma kwadratów jest nieujemna dla dowolnych liczb  $a$  i  $b$ .

To kończy dowód.

$$4 \mid n^2$$



4 jest dzielnikiem  $n^2$

**ZADANIA**

- Wiedząc, że  $a + b = \sqrt{5}$  i  $ab = -\sqrt{3}$ , oblicz:
  - $a^2 + b^2$ ,
  - $a^3 + b^3$ .
- Wykaż, że  $(a + b + c)^3 + (a - b - c)^3 + (c - a - b)^3 + (b - a - c)^3 = 24abc$ .
- Wykaż, że liczba  $13^7 - 128$  jest podzielna przez 11.
- Wykaż, że jeżeli  $n$  jest liczbą naturalną niepodzielną przez 3, to reszta z dzielenia przez 3 liczby  $n^2$  jest równa 1.
- Wykaż, że jeżeli  $ab > 0$ , to  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ .

→ Odpowiedzi  
s. 248

## Podsumowanie 1

## Quiz z teorii



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: QR7WLM

Film –  
rozwiązanie  
zadania

app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: 53RP5V

1. Pierwiastkowanie a potęgowanie ( $a > 0, n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ).

$$\sqrt[k]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \left( (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{nmk}}$$

Zapiszmy  $\sqrt[4]{125\sqrt[3]{25}}$  w prostszej postaci.

$$\begin{array}{ccc} & \sqrt[4]{125\sqrt[3]{25}} & \\ & = 5^3 = (5^2)^{\frac{1}{3}} & \\ \text{można tak} \swarrow & & \searrow \text{lub tak} \\ (5^3)^{\frac{1}{4}} \cdot (5^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} & & (5^{3+\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}} \\ \searrow & & \swarrow \\ 5^{\frac{11}{12}} & & \\ = \sqrt[12]{5^{11}} & & \end{array}$$

2. Wymierna czy niewymierna?

Czy suma liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

**TAK**    **NIE**

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

Czy suma liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

**TAK**    **NIE**

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Czy iloczyn liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

**TAK**    **NIE**

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Czy iloczyn liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

**TAK**    **NIE**

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

Czy iloraz liczb **niewymiernych** może być liczbą **wymierną**?

**TAK**    **NIE**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Czy iloraz liczb **niewymiernych** może być liczbą **niewymierną**?

**TAK**    **NIE**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

3. Uzupełnij zapisy związane z podzielnością liczb ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$n = 2k$  zapis liczby podzielnej przez 2, czyli zapis liczby parzystej

$n = 3k$  zapis liczby podzielnej przez 3

$n = 10k$  zapis liczby podzielnej przez 10

$n = \dots k$  zapis liczby podzielnej przez 13

$n = mk$  zapis liczby podzielnej przez  $m$

$n = 2k + 1$  zapis liczby, która przy dzieleniu przez 2 daje resztę 1, czyli zapis liczby nieparzystej

$n = 3k + 1$  zapis liczby, która przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1

$n = 10k + 4$  zapis liczby, która przy dzieleniu przez 10 daje resztę 4

$n = 17k + 10$  zapis liczby, która przy dzieleniu przez ..... daje resztę .....

$n = mk + 1$  zapis liczby, która przy dzieleniu przez  $m$  daje resztę 1

$k + (k + 1)$  suma dwóch kolejnych liczb całkowitych

$2k + (2k + 2)$  suma dwóch kolejnych liczb parzystych

$(2k + 1) + (2k + 3)$  suma dwóch kolejnych liczb .....

$(3k - 3) + 3k + (3k + 3) =$   
 $= 3(k - 1) + 3k + 3(k + 1)$  suma trzech kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez .....

4. Udowodnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez 3 jest podzielna przez 9.

Aby wykazać, że dana liczba jest podzielna przez 9, wystarczy zapisać ją w postaci:

$$9 \cdot \text{liczba całkowita}$$

**Oznaczmy:**  $k$  – liczba całkowita

$3k, 3k + 3$  – dwie kolejne liczby podzielne przez 3

$(3k)^2 + (3k + 3)^2$  – suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych podzielnych przez 3

**Dowód:**  $(3k)^2 + (3k + 3)^2 = 9k^2 + 9k^2 + 18k + 9 = 9(2k^2 + 2k + 1)$

**liczba całkowita**

(Liczba  $k$  jest całkowita, zatem liczby  $2k^2$  i  $2k$  są całkowite, a suma liczb całkowitych jest **liczbą całkowitą**).

Liczbę  $(3k)^2 + (3k + 3)^2$  zapisaliśmy w postaci iloczynu liczby 9 oraz liczby całkowitej, zatem jest ona podzielna przez 9.

Film –  
rozwiązanie  
zadania



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: LWFVWU

Film –  
rozwiązanie  
zadania



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: EV36MZ

Podsumowanie –  
uzupełnione  
odpowiedzi



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: P7RDW2

## Zadania maturalne

→ Odpowiedzi  
s. 248

Wzory CKE



Kod: 82E839

app.nowaterazmatura.pl

### Zadanie 1 (0–2)

Zapisz w postaci  $|x - a| \leq b$  nierówność z niewiadomą  $x$ , której zbiorem rozwiązań jest przedział  $[-6; 4]$ .

### Zadanie 2 (0–2)

Zapisz w postaci  $|x - a| \geq b$  nierówność z niewiadomą  $x$ , której zbiorem rozwiązań jest suma przedziałów  $(-\infty; -2] \cup [8; \infty)$ .

### Zadanie 3 (0–2)

Oblicz  $\frac{64 \cdot \sqrt[4]{16} \sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[4]{8} \sqrt[4]{8}}$ .

### Zadanie 4 (0–2)

Oblicz  $\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})(\sqrt{3} - 2)^2 (2\sqrt{6} + 5)} + \sqrt[6]{27}$ .

### Zadanie 5 (0–2)

Oblicz  $\left( (6 + 11\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} + (6 - 11\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \right)^2$ .

### Zadanie 6 (0–2)

Wykaż, że liczba  $\frac{\sqrt{\sqrt{5} + 2} - \sqrt{\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}} - \frac{\sqrt{5}}{2}$  jest wymierna.

### Zadanie 7 (0–2)

Zapisz wyrażenie  $\frac{5}{4}a(-2a - 3)^2 - (a\sqrt{5} - 2)(a + 3)(a\sqrt{5} + 2)$  w najprostszej postaci i oblicz jego wartość dla  $a = 4\sqrt{3} - 8$ .

### Zadanie 8 (0–2)

Wykaż, że jeżeli  $n$  jest dodatnią liczbą naturalną, to liczba  $n^6 - 2n^4 + n^2$  jest podzielna przez 36.

### Zadanie 9 (0–2)

Wykaż, że reszta z dzielenia przez 12 sumy kwadratów trzech kolejnych naturalnych liczb nieparzystych jest równa 11.

### Zadanie 10 (0–2)

Wykaż, że suma sześciątów dwóch kolejnych nieparzystych liczb naturalnych jest podzielna przez 4.

### Zadanie 11 (0–2)

Wykaż, że liczba  $13^6 - 11^6$  jest podzielna przez  $2^4$  i nie jest podzielna przez  $2^5$ .

### Zadanie 12 (0–2)

Wykaż, że jeżeli  $a$ ,  $b$  i  $c$  są różnymi od zera liczbami rzeczywistymi takimi, że  $a + b + c = 0$ , to  $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} = 0$ .

**Zadanie 13 (0-2)**

Wykaż, że jeżeli  $a \neq 0$  i  $a + \frac{1}{a} = 4$ , to  $a^3 + \frac{1}{a^3} = 52$ .

**Zadanie 14 (0-3)**

Wykaż, że  $\frac{x+y}{(y-z)(z-x)} - \frac{y+z}{(x-z)(x-y)} - \frac{z+x}{(y-x)(y-z)} = 0$ . Zapisz konieczne założenia.

**Zadanie 15 (0-3)**

Wiedząc, że  $a + b = 5$  i  $a^2 + b^2 = 17$ , oblicz  $a^4 + b^4$ .

**Zadanie 16 (0-3)**

Wyznacz takie dodatnie liczby naturalne  $a$  i  $b$ , dla których wartość wyrażenia  $a^2 + 2ab + b^2 + 2a + 2b$  jest równa 15.

**Zadanie 17 (0-3)**

Wiedząc, że  $k + m = 2$  i  $k^3 + m^3 = 5$ , oblicz  $km$ .

**Zadanie 18 (0-3)**

Wiedząc, że  $\frac{3a}{x+5} = \frac{2b-1}{x}$  dla  $x \neq -5$ ,  $x \neq 0$ ,  $a \neq 0$  i  $b \neq \frac{1}{2}$ , wyznacz  $\frac{5}{x}$ .

**Zadanie 19 (0-3)**

CKE maj 2023 PR

Liczby rzeczywiste  $x$  oraz  $y$  spełniają jednocześnie równanie  $x + y = 4$  i nierówność  $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ . Wykaż, że  $x = 2$  oraz  $y = 2$ .

**Zadanie 20 (0-3)**

CKE maj 2018 PR

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $k$  i dla każdej liczby całkowitej  $m$  liczba  $k^3m - km^3$  jest podzielna przez 6.

**Zadanie 21 (0-3)**

CKE maj 2025 PR

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ , prawdziwa jest nierówność  $(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$ .

**Zadanie 22 (0-3)**

CKE maj 2022 PR

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  i dla każdej liczby rzeczywistej  $y$  takich, że  $2x > y$ , spełniona jest nierówność  $7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$ .

**Zadanie 23 (0-3)**

CKE marzec 2022 PR

Udowodnij, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.

**Zadanie 24 (0-4)**

Wyznacz takie dodatnie liczby naturalne  $a$  i  $b$ , dla których wartość wyrażenia  $a^2 - b^2 + 3a - 3b$  jest równa 22.

**Zadanie 25 (0-4)**

Wykaż, że  $(a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(a + c) = a^3 + b^3 + c^3$ .

## 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

## Rozwiązania zadań



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: 5PRHJA

## ZADANIA

## 1.1

3. 5

4.  $-5, -2, -1, 0, 2, 3, 4, 7$ 5.  $(-\infty; 3]$ 6.  $(-2 - \sqrt{\pi}; \sqrt{10\pi} + 3)$ 7. a)  $\frac{4}{33}$ , b)  $\frac{7}{90}$ , c)  $\frac{7}{22}$ 

## 1.2

1.  $x = 0$  lub  $x = -6$ 2. a)  $x \in [-7; 5]$ , b)  $x \in (-\infty; 5) \cup (7; \infty)$ 3.  $|x - 2| < 7$ 4.  $\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$ 

## 1.3

1. a) 1, b)  $\frac{1}{49}$ 4. a)  $3^{\frac{7}{10}}$ , b)  $5^{\frac{29}{24}}$ 

## 1.4

1. a)  $5 + 2\sqrt{3}$ , b)  $5\sqrt{5} + 3\sqrt{15}$ 

## Rozwiązania zadań maturalnych



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: G5HL13

## Zadania maturalne

1.  $|x + 1| \leq 5$ 2.  $|x - 3| \geq 5$ 3.  $16^{\sqrt[8]{2}}$ 

4. 2

5. 22

6.  $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ 7.  $\frac{61}{4}a + 12; 61\sqrt{3} - 110$ 

15. 257

16.  $a = 1, b = 2$  lub  $a = 2, b = 1$ 17.  $km = \frac{1}{2}$ 18.  $\frac{5}{x} = \frac{3a - 2b + 1}{2b - 1}$ 24.  $a = 5, b = 3$  lub  $a = 10, b = 9$ 

## 2. Funkcje. Funkcja liniowa

## Rozwiązania zadań



app.nowa  
terazmatura.pl  
Kod: UM53DT

## ZADANIA

## 2.1

1. a)  $[-2; 2]$ , b)  $x \in [-3; -2] \cup \{1, 5\}$ , c)  $[-4; -3], [-2; -1], [1; 2], [4; 6]$ , d)  $x = -1$ , e)  $x \in (-5; -2] \cup \{1\} \cup (2; 5]$ , f) trzy2. a)  $D = (5; \infty)$ , b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$ 3.  $ZW = (-\infty; 1]$

## Potęgi i pierwiastki

- Dla  $a > 0, k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+, n > 1$ :  
 $a^{-k} = \frac{1}{a^k}, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, a^{\frac{k}{n}} = (\sqrt[n]{a})^k, a^{-\frac{k}{n}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^k}$
- Dla  $a > 0, b > 0, w \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$ :  
 $a^w \cdot a^t = a^{w+t}, a^w : a^t = a^{w-t}, (a^w)^t = a^{w \cdot t},$   
 $a^w \cdot b^w = (a \cdot b)^w, \frac{a^w}{b^w} = \left(\frac{a}{b}\right)^w$

## Logarytmy

- Dla  $a > 0, p > 0, p \neq 1$ :  $\log_p a = b$ , gdy  $p^b = a$
- Dla  $a > 0, b > 0, p > 0, p \neq 1, x > 0, x \neq 1, r \in \mathbb{R}$ :  
 $\log_p(ab) = \log_p a + \log_p b, \log_p \frac{a}{b} = \log_p a - \log_p b, p^{\log_p b} = b,$   
 $\log_p a^r = r \cdot \log_p a, \log_p a = \frac{\log_x a}{\log_x p}, \log_p p = 1, \log_p 1 = 0$

## Wzory skróconego mnożenia

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^{n-k} + \dots + a + 1)$

## Funkcja kwadratowa

Wzór funkcji kwadratowej ( $a \neq 0, x \in \mathbb{R}$ ):

- w postaci ogólnej:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,
- w postaci kanonicznej:  $f(x) = a(x - p)^2 + q$ , gdzie  $(p, q)$  – wierzchołek paraboli,  $p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$ ,
- w postaci iloczynowej:  
 – jeśli  $\Delta = 0$ , to  $f(x) = a(x - x_0)^2$ ,  
 gdzie  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  – pierwiastek podwójny,  
 – jeśli  $\Delta > 0$ , to  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ,  
 gdzie  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  – pierwiastki,  
 – jeśli  $\Delta < 0$ , to funkcja nie ma postaci iloczynowej.

Jeśli  $\Delta \geq 0$ , to zachodzą wzory Viète'a:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

## Wielomiany

- Podzielność wielomianów.** Jeżeli  $W$  i  $P$  są niezerowymi wielomianami oraz  $\text{st}(P) \leq \text{st}(W)$ , to istnieją takie wielomiany  $Q$  i  $R$ , że  $W(x) = P(x)Q(x) + R(x)$  oraz wielomian  $R$  jest wielomianem zerowym lub  $\text{st}(R) < \text{st}(P)$ . Jeżeli  $R = 0$ , to mówimy, że  $W$  jest podzielny przez  $P$ .
- Twierdzenie o reszcie.** Jeżeli  $R$  jest resztą z dzielenia wielomianu  $W$  przez dwumian  $x - a$ , to  $R = W(a)$ .
- Twierdzenie Bézouta.** Wielomian  $W$  jest podzielny przez dwumian  $x - a$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $W(a) = 0$ .

## Równanie prostej

Równanie kierunkowe:  $y = ax + b, a = \text{tg } \alpha$

- Równanie prostej  $PQ$  dla  $P = (x_1, y_1)$  i  $Q = (x_2, y_2)$ :  
 $(y - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x - x_1) = 0$
- Równanie prostej o współczynniku kierunkowym  $a$  przechodzącej przez punkt  $P = (x_1, y_1)$ :  $y = a(x - x_1) + y_1$

Równanie ogólne:  $Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$

- Odległość punktu  $P = (x_0, y_0)$  od tej prostej:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Proste  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$ :

- są równoległe, gdy  $a_1 = a_2$ ,
- są prostopadłe, gdy  $a_1 a_2 = -1$ , czyli gdy  $a_2 = -\frac{1}{a_1}$ .

Proste  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  i  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ :

- są równoległe, gdy  $A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0$ ,
- są prostopadłe, gdy  $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ .

## Geometria analityczna

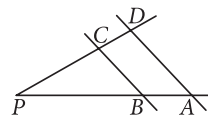
$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2)$ ,  $M$  – środek odcinka  $AB$

- $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),$   
 $\vec{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$
- Jeśli  $\vec{u} = [u_1, u_2], \vec{v} = [v_1, v_2]$ , to:  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow u_1 = v_1$  i  $u_2 = v_2$
- Równanie okręgu  $o((a, b), r)$ :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

## Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne

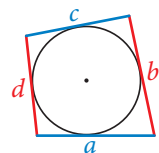
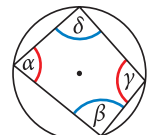
$$BC \parallel AD \Leftrightarrow \frac{|PB|}{|BA|} = \frac{|PC|}{|CD|}$$

$$\text{Stąd } \frac{|PB|}{|PA|} = \frac{|PC|}{|PD|} = \frac{|BC|}{|AD|}$$



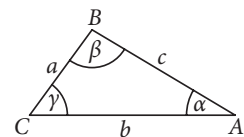
## Czworokąt i okrąg

- Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych kątów tego czworokąta są równe.  
 $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$
- W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków tego czworokąta są równe.  
 $a + c = b + d$



## Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów

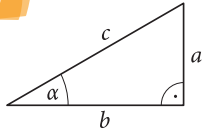
- Twierdzenie sinusów:  
 $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$
- Twierdzenie cosinusów:  
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$   
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$   
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$



$R$  – promień okręgu opisanego na trójkącie

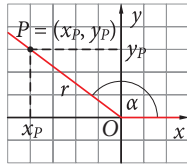
## Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



## Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

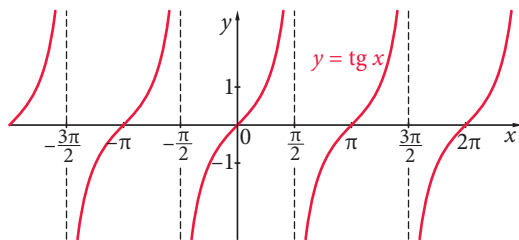
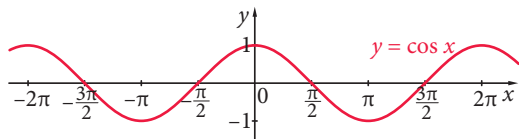
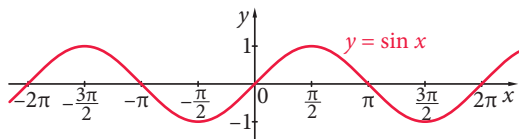
- $r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$   
 $\sin \alpha = \frac{y_p}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_p}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_p}{x_p}$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



## Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych kątów

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

## Wykresy funkcji trygonometrycznych



## Wybrane wzory redukcyjne

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

## Wzory trygonometryczne

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

## Ciąg arytmetyczny

- $a_{n+1} = a_n + r$
- $a_n = a_1 + (n-1)r, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$  dla  $n \geq 2$
- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

## Ciąg geometryczny

- $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$  dla  $n \geq 2$
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ , gdy  $q \neq 1, \quad S_n = n \cdot a_1$ , gdy  $q = 1$
- Jeśli  $|q| < 1$ , to suma szeregu geometrycznego:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ .

## Pochodne niektórych funkcji

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \frac{1}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}, D = [0; \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, D' = (0; \infty)$
$f(x) = x^k, k \neq 0, k \neq 1$	$f'(x) = kx^{k-1}$

## Działania na pochodnych

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$  dla  $c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$  dla  $g(x) \neq 0$
- $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

## Równanie stycznej

Jeśli funkcja  $f$  ma pochodną w  $x_0$ , to styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  ma równanie:  
 $y = ax + b$ , gdzie  $a = f'(x_0)$

## Silnia. Symbol Newtona. Dwumian Newtona

- $0! = 1$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  dla  $n \in \mathbb{N}_+$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  dla  $n, k \in \mathbb{N}$  i  $k \leq n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ,  $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$

## Kombinatoryka

- Liczba  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego:  $n^k$
- Liczba  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego ( $1 \leq k \leq n$ ):  $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Liczba permutacji zbioru  $n$ -elementowego:  $n!$
- Liczba  $k$ -elementowych kombinacji (podzbiorów) zbioru  $n$ -elementowego ( $0 \leq k \leq n$ ):  $\binom{n}{k}$

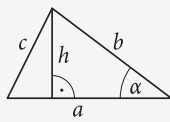
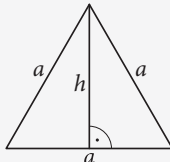
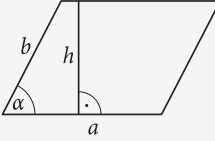
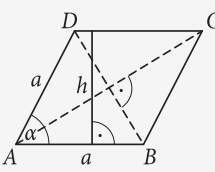
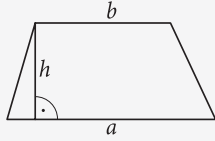
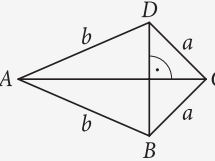
## Rachunek prawdopodobieństwa

- Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**  
Niech  $A \subset \Omega$ . Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .
- Własności prawdopodobieństwa**  
Dla  $A, B \subset \Omega$ :  $P(\emptyset) = 0$ ,  $P(\Omega) = 1$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$ ,  
 $P(A') = 1 - P(A)$ ,  $P(A) \leq P(B)$  dla  $A \subset B$ ,  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Prawdopodobieństwo warunkowe**  
Dla  $A, B \subset \Omega$ ,  $P(B) > 0$ :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Prawdopodobieństwo całkowite**  
Niech  $A, B_1, \dots, B_n \subset \Omega$ . Jeśli  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$ ,  
 $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$  oraz  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$ , to  
 $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$ .
- Wzór Bayesa**  
Jeżeli zdarzenia  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$  tworzą układ zupełny,  
 $A \subset \Omega$  i  $A \neq \emptyset$ , to dla dowolnego  $1 \leq i \leq n$  prawdziwa jest  
zależność:  $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$
- Schemat Bernoulliego**  
Prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w schemacie  $n$  prób Bernoulliego:  
 $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  
gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem sukcesu, a  $q = 1 - p$  jest prawdopodobieństwem porażki w pojedynczej próbie.

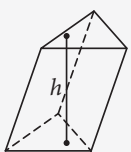
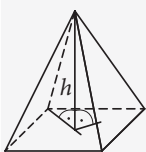
## Parametry statystyczne

- Dominanta** zestawu danych to wartość występująca najczęściej, ale więcej niż raz.
- Mediana** uporządkowanego zestawu  $n$  liczb to wyraz środkowy (dla  $n$  nieparzystych) lub średnia arytmetyczna dwóch wyrazów środkowych (dla  $n$  parzystych).

## Trójkąty i czworokąty

 <p><math>p</math> – połowa obwodu <math>R</math> – promień okręgu opisanego na trójkącie <math>r</math> – promień okręgu wpisanego w trójkąt</p>	<p><b>Trójkąt</b></p> $P = \frac{1}{2}ah$ $P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$ $P = \frac{abc}{4R}$ $P = pr$ $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
	<p><b>Trójkąt równoboczny</b></p> $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ $h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$ $R = \frac{2}{3}h$ $r = \frac{1}{3}h$
	<p><b>Równoległobok</b></p> $P = ah$ $P = ab \sin \alpha$
	<p><b>Romb</b></p> $P = ah$ $P = \frac{ AC  \cdot  BD }{2}$ $P = a^2 \sin \alpha$
	<p><b>Trapez</b></p> $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$
	<p><b>Deltoid</b></p> $P = \frac{ AC  \cdot  BD }{2}$

## Graniastosłup i ostrosłup

Graniastosłup	Ostrosłup
 $P_c = P_b + 2P_p$ $V = P_p \cdot h$	 $P_c = P_b + P_p$ $V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$

- Bryły podobne**  
Jeżeli bryła  $F_1$  o polu powierzchni całkowitej  $P_1$  i objętości  $V_1$  jest podobna w skali  $k$  do bryły  $F_2$  o polu powierzchni całkowitej  $P_2$  i objętości  $V_2$ , to:  
 $\frac{P_1}{P_2} = k^2$  oraz  $\frac{V_1}{V_2} = k^3$



## I wiesz, jak zdać maturę

### ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

ćwiczenie rozwiązywania zadań maturalnych oraz zadań CKE



### VADEMECUM

powtarzanie wiadomości połączone z rozwiązywaniem zadań różnego typu



### ARKUSZE MATURALNE

rozwiązywanie arkuszy maturalnych dopasowanych do matury

### CYFROWE WSPOMAGANIE NAUKI

- **APLIKACJA** – materiały cyfrowe zintegrowane z Vademecum, Zbiorem zadań maturalnych i Arkuszami maturalnymi, ułatwiające przygotowania do egzaminu [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl)
- **SERWIS MATURALNY** – wszystkie niezbędne informacje o maturze [nowaterazmatura.pl](http://nowaterazmatura.pl)

