2.2. Przykłady

2.2.1. Dwie świnie

W jednym pomieszczeniu umieszczono dwie świnie[4]. W hierarchii stada jedna z nich stoi wyżej (świnia dominująca), a druga – niżej (zdominowana). Pomieszczenie jest zbudowane tak, że po jednej stronie znajduje się koryto, a na drugim końcu jest dźwignia służąca do wydawania jedzenia. Aby jedzenie znalazło się w korycie, należy nacisnąć dźwignię. Żeby się najeść, trzeba podejść do koryta. Można też siedzieć przy korycie i czekać, aż dźwignię naciśnie koleżanka.

Jeśli żadna ze świń nie naciśnie dźwigni, jedzenia nie będzie, czemu przypisujemy wartość 0. Jeśli świnia zdominowana pójdzie nacisnąć dźwignię, a świnia dominująca poczeka przy korycie, to świnia dominująca się naje w stopniu, który oceniłaby na 9 jednostek przyjemności[5], a świni zdominowanej pozostaną resztki, oceniane przez nią na 1 jednostkę. Jeśli to świnia dominująca naciśnie dźwignię, świnia zdominowana rzuci się na jedzenie i zje tyle ile się da, zanim świnia dominująca przybiegnie i ją przegoni. Świnia dominująca racjonalnie oceni wówczas swoją przyjemność na 4, a świnia zdominowana również na 4. Z kolei jeśli obie świnie ruszą do dźwigni, po jej naciśnięciu pobiegną w te pędy do koryta. Świnia zdominowana, jako szybsza i zwinniejsza, uzyska 3 „punkty przyjemności", a świnia dominująca 5.

Jest to gra dwuosobowa. (Ma dwóch graczy – świnię dominującą i zdominowaną. Powiedzmy, że są to osoby). Zbiór graczy można oznaczyć

$\{D, Z\}$,

gdzie D to świnia dominująca, a Z – świnia zdominowana. W pewnych przypadkach lepiej stosować takie symbole zamiast liczb. Trzymając się konwencji wprowadzonej w części teoretycznej, ustalmy że świnia dominująca to gracz 1, a świnia zdominowana to gracz 2.

Obie świnie stoją przy korycie i czekają. Jakie strategie mają do wyboru? Zakładając, że podejmują decyzję jednocześnie i że z decyzji nie mogą się wycofać, każda z nich ma wybór pomiędzy czekaniem przy korycie (C) a podejściem do

---

[4] Naprawdę tak zrobiono. Doświadczenie opisali w swoim artykule Baldwin i Meese (1979). Tu podajemy trochę inne liczby. Wartości z klasycznej postaci gry wykorzystano w przykładzie 2.2.2.

[5] Trzeba ustalić, w jakich jednostkach mierzone są wypłaty. Zazwyczaj, gdy zaczyna się rozważać gry, w których graczami są ludzie, mowa jest o wypłatach pieniężnych, co wydaje się zrozumiałe. Świnie jako gatunek nie wypracowały systemu pieniężnego, więc trzeba mówić o jakichś „jednostkach przyjemności". Kwestia ta zostanie podjęta w rozdziale 4.

dźwigni (D). Takie działania mogą wykonać i takie są ich strategie[6]. Zbiory możliwych strategii to zatem

$S_1 = S_2 = \{C, D\}$.

Zbiór możliwych profili strategii, czyli *de facto* możliwych przebiegów gry lub sytuacji końcowych, jest następujący:

$S = \{CC, CD, DC, DD\}$.

Profil CC oznacza, że obie świnie postanowiły czekać przy korycie, CD odpowiada sytuacji, gdy świnia dominująca czeka, a świnia zdominowana naciska dźwignię, DC – świnia dominująca podchodzi do dźwigni, a świnia zdominowana czeka, a DD odpowiada sytuacji, gdy obie świnie podchodzą do dźwigni.

Na podstawie przedstawionych danych można ustalić funkcje wypłaty dla każdej ze świń. Dla gracza 1 funkcja wypłaty jest następująca:

$\pi_1(CC) = 0, \pi_1(CD) = 9, \pi_1(DC) = 4, \pi_1(DD) = 5,$

natomiast gracz 2 ma następującą funkcję wypłaty:

$\pi_2(CC) = 0, \pi_2(CD) = 1, \pi_1(DC) = 4, \pi_1(DD) = 3.$

Wektorowa funkcja wypłaty, opisująca wypłaty obu graczy jednocześnie, to:

$\pi(CC) = (0{,}0), \pi(CD) = (9{,}1), \pi(DC) = (4{,}4), \pi(DD) = (5{,}3).$

Jest to gra dwuosobowa o skończonej liczbie strategii dla każdego gracza, a zatem można ją przedstawić w postaci macierzowej. Poniżej podana jest macierz tej gry:

		Gracz 2 (Z)	
		C	D
Gracz 1 (D)	C	0, 0	9, 1
	D	4, 4	5, 3

Czy któraś ze strategii jest zdominowana przez inną? Łatwo można sprawdzić, że dla gracza 1 strategia C nie jest zdominowana przez D (ponieważ $\pi_1(CD) > \pi_1(DD)$) ani strategia D nie jest zdominowana przez C (ponieważ $\pi_1(DC) > \pi_1(CC)$). Podobnie dla gracza drugiego: strategia C nie jest zdominowana przez D (ponieważ $\pi_2(DC) > \pi_2(DD)$ $\pi_2(DC) > \pi_2(DD)$) ani strategia D nie jest zdominowana przez C, ponieważ $\pi_2(CD) > \pi_2(CC)$.

[6] W przypadku tej gry strategia jest jednoznaczna z działaniem (podjęciem jakiejś czynności). Nie zawsze jest to prawdą. Jak zobaczymy później, strategia to pewien ciąg lub plan działań uwarunkowany działaniami innych graczy.

2.2.2. Dwie świnie – wersja doświadczalna

Rozważmy grę z przykładu 2.2.1, ale z innymi wypłatami. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, gdy żadna ze świń nie naciśnie dźwigni, wypłaty wynoszą 0, a jeżeli do dźwigni podejdzie jedynie świnia dominująca, wypłaty obu świń to 4. Jeśli do dźwigni podejdą obie świnie, to świnia dominująca uzyska satysfakcję ocenianą na 5, a świnia zdominowana – satysfakcję równą 1. Wreszcie jeśli dźwignię naciśnie jedynie świnia podporządkowana, to świnia dominująca zje cały pokarm (9 punktów satysfakcji), a świnia podporządkowana będzie tym sfrustrowana, co przełoży się na ujemną satysfakcję równą -1. Macierz poniżej przedstawia wypłaty dla obu świń przy różnych profilach strategii.

		Gracz 2 (Z)	
		C	D
Gracz 1 (D)	C	0, 0	9, –1
	D	4, 4	5, 3

Zmiana wysokości wypłat zasadniczo zmienia grę. Jak można łatwo zauważyć, strategia D gracza 2 jest silnie zdominowana przez strategię C. Istotnie, $\pi_2(CC) = 0 > -1 = \pi_2(CD)$ oraz $\pi_2(DC) = 4 > 3 = \pi_2(DD)$. Gracz drugi nigdy więc nie zastosuje strategii D (o ile działa racjonalnie). Racjonalny gracz 1 wie o tym, więc wyklucza strategię D z listy możliwych odpowiedzi gracza 2. Wie, że gracz 2 zastosuje strategię C. Świnia zdominowana będzie czekała i ani jej w głowie podejść do dźwigni. Wobec tego gracz 1 wybierze strategię D. Po iteracyjnym wyeliminowaniu strategii zdominowanych pozostanie zatem profil strategii DC.

Wartości wypłat podane w tym przykładzie są zgodne z oszacowaniami w doświadczeniu, które rzeczywiście wykonano. Wynik doświadczenia był zgodny z otrzymanym rozwiązaniem: świnia dominująca biegała do dźwigni podajnika, a świnia zdominowana czekała na pokarm przy korycie. Jak się zatem okazuje, pewne „upośledzenie”, takie jak niższa pozycja w hierarchii społecznej, w pewnych sytuacjach może się okazać korzystne.

2.2.3. Aukcja Vickreya

Na aukcji sprzedawany jest obraz. Kupnem zainteresowanych jest n kolekcjonerów. Dla każdego z nich obraz ma pewną wartość, przy czym ta subiektywna wartość może być różna dla każdego kolekcjonera. Dla kolekcjonera i wartość obrazu wynosi v_i. Aukcja przebiega w sposób następujący: każdy z licytujących podaje swoją cenę obrazu, p_i. Wygrywa ten, kto podał najwyższą wartość, ale nie płaci podanej przez siebie ceny, ale drugą najwyższą cenę. Pokażemy, że dla każdego licytującego strategia polegająca na podaniu „prawdziwej" wartości obrazu, tj. $p_i = v_i$, jest strategią dominującą (słabo) nad każdą inną strategią.

Dla uproszczenia załóżmy, że nie ma sytuacji, w której dwóch lub więcej licytujących podaje taką samą cenę. Strategia każdego gracza to wybór ceny podanej na licytacji $p_i \in S_i = [0, +\infty)$. Rozważmy gracza i oraz jego strategię $p_i^* = v_i$. Załóżmy najpierw, że gracz i wygrał loterię (podał najwyższą cenę), a cena druga w kolejności wynosi $p_j < p_i^*$. Wypłata gracza i wynosi $\pi_i = v_i - p_j = p_i^* - p_j > 0$. Gdyby gracz i zastosował strategię $p_i' > p_i^*$, jego wypłata nadal wynosiłaby $\pi_i = v_i - p_j$. Gdyby podał niższą cenę, $p_i' < p_i^*$, możliwe są dwie sytuacje. Gdyby cena $p_i' > p_j$, gracz i wygrałby aukcję i jego wypłata nadal wynosiłaby $\pi_i = v_i - p_j$. Gdyby cena p_i' była niższa od ceny drugiej w kolejności, gracz i przegrałby aukcję i jego wypłata wyniosłaby 0. Zatem w sytuacji gdy gracz i wygrywa aukcję, wypłata ze strategii $p_i^* = v_i$ jest nie mniejsza (a w pewnych przypadkach większa) niż wypłata z jakiejkolwiek innej strategii.

Rozważmy teraz sytuację, gdy gracz i nie wygrywa licytacji, stosując strategię $p_i^* = v_i$ – ktoś podał wyższą cenę. Wypłata gracza i wynosi w tym przypadku 0. Gdyby podał niższą cenę, też nie wygrałby aukcji, więc wypłata nadal byłaby zerowa. Gdyby podał cenę niższą niż najwyższa z licytowanych cen, nie wygrałby aukcji i miałby zerową wypłatę. Gdyby podał cenę p_i' wyższą od najwyższej z licytowanych cen, p_j, wygrałby aukcję, ale jego wypłata wyniosłaby $\pi_i = v_i - p_i' < v_i - p_j < 0$, ponieważ $p_j > p_i^* = v_i$.

2.2.4. Lokalizacja budek przy ulicy

Dwóch biznesmenów pracujących w branży sprzedaży kebabów chce ustawić swoje budki przy pewnej ruchliwej ulicy. Ulica jest podzielona na $m > 2$ sektorów, przy czym zakładamy, że m jest liczbą nieparzystą, a więc istnieje sektor środkowy o numerze $\frac{m+1}{2}$. W sektorze może się znajdować jedna lub dwie budki z kebabem. Każda z budek będzie obsługiwała klientów z sektorów, które mają do niej bliżej. W przypadku gdy z danego sektora jest taka sama odległość do obu budek, klienci podzielą się po połowie. Na przykład, jeśli pierwszy sprzedawca ulokuje budkę w sektorze 3, a drugi – w sektorze 7, to do pierwszego będą zachodzić wszyscy klienci z sektorów 1–4 i połowa klientów z sektora 5. U drugiego sprzedawcy będą kupować klienci z sektorów $6-m$ i połowa klientów z sektora 5. W każdym sektorze jest tyle samo klientów: można przyjąć, że liczba klientów w pojedynczym sektorze wynosi 1.

W tym przypadku strategie graczy polegają na wskazaniu sektora, w którym umieszczą swoją budkę: $S_1 = S_2 = \{1,2,\ldots,m\}$. Wypłata gracza to liczba klientów, którzy będą kupować w jego budce (czyli liczba obsługiwanych sektorów ulicy). Rozważmy gracza 1. Pokażemy, że strategia polegająca na umieszczeniu budki w sektorze 1, $s_1 = 1$, jest zdominowana przez strategię $s_1' = 2$ (umieszczenie budki w drugim sektorze).

W tabeli poniżej znajdują się wypłaty z obu strategii przy różnych strategiach (lokalizacjach) gracza 2.

Strategia gracza 2	$s_1 = 1$	$s_1' = 2$
$s_2 = 1$	$\frac{m}{2}$	$m-1$
$s_2 = 2$	1	$\frac{m}{2}$
$s_2 = 3$	1,5	2
$s_2 = 4$	2	2,5
…	…	…
$s_2 = m-1$	$\frac{m-1}{2}$	$\frac{m}{2}$
$s_2 = m$	$\frac{m}{2}$	$\frac{m+1}{2}$

Jak łatwo zauważyć, wypłata ze strategii $s_1' = 2$ jest zawsze większa niż ze strategii $s_1 = 1$, bez względu na wybór lokalizacji przez drugiego sprzedawcę. Podobnie można pokazać, że strategia $s_1 = m$ (lokalizacja budki na końcu ulicy) jest silnie zdominowana przez strategię $s_1' = m-1$ (lokalizacja trochę bliżej środka). Obie te strategie można więc wyeliminować. Wyeliminować można też strategie gracza drugiego $s_2 = 1$ i $s_2 = m$.

Aby wyeliminować następne strategie, udowodnimy następujące stwierdzenie:

(T1) Jeżeli gracz pierwszy wie, że jego konkurent nie postawi swojej budki w żadnym z sektorów 1, 2, .., $k-1$ (gdzie $k < \frac{m}{2}$), to strategia $s_1 = k$ jest silnie zdominowana przez strategię $s_1^* = k+1$.

Oznaczmy przez j sektor wybrany przez gracza drugiego (tj. $s_2 = j$). Rozważmy trzy przypadki:

a) Jeżeli $j = k$, gracz pierwszy, stosując strategię $s_1 = k$, otrzymuje wypłatę $\frac{m}{2}$ (obaj gracze wybierają ten sam sektor, a więc dzielą między siebie całą ulicę). Przy strategii $s_1^* = k+1$ wypłata gracza pierwszego wyniesie $m-k$ (gracza zajmuje sektor $k+1$ oraz wszystkie sektory o numerach wyższych). Ponieważ $k < \frac{m}{2}$, więc $m-k > \frac{m}{2}$. Graczowi 1 opłaca się więc zmienić strategię z s_1 na s_1^*.

b) Jeżeli $j = k+1$, wypłata gracza pierwszego ze strategii $s_1 = k$ wynosi k. Przenosząc się do sektora $k+1$, gracz pierwszy będzie w tym samym sektorze co gracz drugi. Jego wypłata wyniesie zatem $\frac{m}{2}$, a więc będzie większa $(k < \frac{m}{2})$.

c) Jeżeli $j > k+1$, to gracz pierwszy, zmieniając strategię z $s_1 = k$ na $s_1^* = k+1$, utrzymuje kontrolę nad wszystkimi sektorami, które kontrolował wcześniej. Dodatkowo zyskuje kontrolę nad połową sektora między sektorami k i j. Zmiana strategii jest więc dla niego korzystna.

Zgodnie z twierdzeniem (T1), jeżeli gracz wie, że jego konkurent nie wybierze lokalizacji w sektorze o numerze mniejszym niż k (gdzie k znajduje się w pierwszej połowie ulicy), to przesunięcie się w kierunku centrum zwiększa wypłatę gracza. Analogicznie można udowodnić odpowiednie twierdzenie dotyczące drugiej połowy ulicy.

(T2) Jeżeli gracz pierwszy wie, że jego konkurent nie postawi swojej budki w żadnym z sektorów $k+1, k+2, \ldots, m$ (gdzie $k > \frac{m}{2}$), to strategia $s_1 = k$ jest silnie zdominowana przez strategię $s_1^* = k-1$.

Twierdzenia (T1) i (T2) dotyczą gracza pierwszego, ale sformułowane w nich zasady odnoszą się do obu graczy. Zgodnie z twierdzeniami (T1) i (T2), jeżeli gracz wie, że zostały już wyeliminowane strategie „skrajne" (polegające na lokalizacji przy jednym z końców ulicy), to opłaca mu się przesunąć swoją lokalizację w kierunku środka ulicy. Pokazaliśmy wcześniej, że gracz nie wybierze żadnej z lokalizacji na krańcach ulicy: ani sektora 1, ani sektora m. Gracz wie, że to samo dotyczy jego konkurenta. Zgodnie z (T1) i (T2) nie wybierze zatem sektora drugiego od końca ulicy: 2 lub $m-1$. Wie też, że jego konkurent rozumuje tak samo. Ponownie stosując (T1) i (T2), możemy wyeliminować sektory trzecie od końca ulicy … itd. Ostatecznie, po iteracyjnej eliminacji strategii silnie zdominowanych, każdy z graczy pozostaje ze strategią polegającą na ulokowaniu swojej budki w sektorze środkowym. Rozwiązaniem gry jest więc profil strategii $\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$.

Model ten służy często jako wyjaśnienie zjawiska koncentracji przemysłu lub działalności handlowej. Sklepy z danej branży zazwyczaj są zakładane blisko siebie. Dodatkowo „lokalizację" można rozumieć bardziej szeroko. Niekoniecznie musi tu chodzić o bliskość geograficzną, raczej dotyczy to pewnych cech produktu. Na przykład konsumenci mogą mieć różne preferencje co do koloru odtwarzacza MP3. Zakładając, że obudowy odtwarzaczy mogą być w różnych odcieniach szarości – od bieli do czerni[7] – wybór koloru odtwarzacza jest pewną „lokalizacją” produktu w skali szarości. Jeżeli preferencje konsumentów są równomiernie rozłożone, strategią niezdominowaną będzie wybór koloru ze środka skali. Podobnie z innymi cechami produktów. Zgodnie z przedstawioną analizą najlepszym wyborem dla graczy jest wytwarzanie produktów o cechach, które są „w środku skali”.

2.2.5. Dylemat więźnia

Zatrzymano dwóch podejrzanych o dokonanie pewnego przestępstwa. Prokurator nie ma jednak przeciwko nim mocnych dowodów. Jedyną szansą na skazanie ich jest to, że któryś z aresztantów zdecyduje się zeznawać. Prokurator postanawia porozmawiać z każdym z więźniów. Przedstawia następującą propozycję: więzień może się przyznać i wydać kolegę. Jeżeli żaden z więźniów nie zgodzi się zeznawać, prokurator nie będzie w stanie udowodnić, że to oni popełnili przestępstwo, ale za różne inne grzeszki każdy z nich dostanie roczny wyrok więzienia. Jeżeli któryś z więźniów wyda kolegę, a drugi więzień nie będzie się przyznawał do winy, to ten, który współpracował z prokuratorem (i wydał kolegę) wyjdzie wolno, a więzień, który nie poszedł na współpracę dostanie wyrok 10 lat więzienia. Jeśli obaj więźniowie wydadzą się nawzajem, każdy otrzyma wyrok ośmioletni. Więźniowie nie mogą się ze sobą komunikować i nie wiedzą, jaką decyzję podejmuje ich kolega.

Jest to gra dwuosobowa, którą można przedstawić w postaci macierzowej. Każdy gracz ma do wyboru dwie strategie: Z – „zeznawaj” (i wydaj kolegę) oraz N – „nie zeznawaj” (i nie wsypuj kolegi). Macierz gry wygląda następująco.

		Więzień 2	
		N	Z
Więzień 1	N	–1, –1	–10, 0
	Z	0, –10	–8, –8

Jak łatwo można sprawdzić, dla obu graczy strategia Z silnie dominuje nad strategią N. Rozważmy sytuację dowolnego z więźniów. Jeśli nie zdecyduje się zeznawać, a jego partner pójdzie na współpracę z prokuratorem, dostanie dziesięć

[7] Zgodnie z zasadą Henry’ego Forda, według której „klient może sobie zażyczyć auta w dowolnym kolorze, pod warunkiem że będzie to kolor czarny”.

lat więzienia, podczas gdy zeznając, dostałby tylko osiem. Z kolei jeśli drugi więzień nie będzie zeznawał, to nasz, nie zeznając, posiedzi rok, a współpracując z prokuratorem od razu wyjdzie na wolność. Zatem bez względu na to, co zrobi drugi więzień, lepiej jest zeznawać.

Po wyeliminowaniu strategii zdominowanych pozostaje zatem profil strategii (Z, Z). Obaj więźniowie zdecydują się zeznawać i obaj pójdą na osiem lat do więzienia. Czy jest to rozwiązanie dla nich najlepsze? W przedstawionej grze profil (N, N) jest profilem optymalnym w sensie Pareta. Istotnie, zmieniając rozwiązanie (N, N) na (N, Z) pogarsza się wypłatę pierwszego gracza (z –1 do –10). Przechodząc z (N, N) do (Z, N), obniża się wypłata gracza drugiego. Natomiast przy zmianie profilu z (N, N) na (Z, Z) zmniejszeniu ulegają wypłaty obu graczy! Profil (Z, Z) jest więc najgorszym rozwiązaniem z punktu wiedzenia obu więźniów. Należy zauważyć, że oprócz profilu (N, N) także profile (N, Z) i (Z, N) są optymalne w sensie Pareta. Gdyby decyzję dotyczącą wyniku gry podejmował jakiś „społeczny planista", wybrałby jeden z tych trzech profili strategii.

Dylemat więźnia jest jedną z najczęściej rozważanych gier, ponieważ stanowi modelową sytuację, którą często spotyka się w analizach społecznych, politycznych i ekonomicznych. Mamy dwie strony, które mogą ze sobą współpracować lub odmówić współpracy (zdradzić się, podjąć walkę). Wiadomo, że obustronna współpraca da najlepsze wyniki z punktu widzenia obu stron – jest to rozwiązanie optymalne w sensie Pareta. Najgorszym rozwiązaniem jest niepodjęcie współpracy przez obie strony (wzajemna walka na wyniszczenie). Jest jednak pewien haczyk – każda ze stron wyjdzie lepiej w sytuacji, gdy nie podejmie współpracy ze współpracującym partnerem. Bodziec do takiego zachowania nie musi być silny, ale może być wystarczający, aby rozważyć takie rozwiązanie. Jeżeli obaj gracze są racjonalni, każdy z nich wie, że drugi rozważy taką możliwość. Co więcej, jeżeli gracz pierwszy jest racjonalny i wie o racjonalności gracza drugiego, to rozważy również to, że gracz drugi będzie go podejrzewał o wybór rozwiązania polegającego na niepodjęciu współpracy. W rezultacie obaj gracze, kierując się rzeczową oceną sytuacji i dobrze pojętym interesem własnym, wybierają rozwiązania, które są niekorzystne dla nich obu.

2.2.6. Stonoga

W standardowym podejściu do analizy gier zakłada się, że wszyscy gracze są racjonalni i wiedzą nawzajem o swojej racjonalności. Zakładają więc, że inni będą się zachowywać racjonalnie i będą brali pod uwagę racjonalność pozostałych graczy – i tak *ad infinitum*. Założenie takie ma pewne paradoksalne konsekwencje, które zostaną zilustrowane w tym przykładzie i w przykładach następnych.

Pewien ekscentryczny miliarder proponuje panom A i B następującą grę. Najpierw proponuje panu A 1 zł. Jeżeli ten przyjmie, gra się kończy – pan A

Rozdział 5

Postać ekstensywna gry

Do tej pory przedstawialiśmy gry w postaci normalnej, w której każdy z graczy ma do dyspozycji określony zbiór strategii i wybiera jedną z nich lub też losowo dobiera strategie. Teoria gier wywodzi się z analizy rzeczywistych gier, takich jak szachy, warcaby, poker lub brydż. Rozgrywka w takich grach odbywa się w sposób dynamiczny i sekwencyjny. Gracze wykonują kolejno lub jednocześnie swoje posunięcia – wybierają pewne akcje. Obserwują rozgrywkę i posunięcia pozostałych graczy. Na danym etapie gry mogą mieć tylko ograniczoną wiedzę na temat jej stanu – na przykład przed zakończeniem partii pokera gracz nie zna kart przeciwników. W postaci normalnej gry nie rozważa się tych szczegółów.

W tym rozdziale jest przedstawiona ekstensywna postać gry, bardziej podstawowa od postaci normalnej. Postać ekstensywna przedstawia informacje, jakie mają gracze na każdym etapie gry, akcje, które mogą podjąć, a także oddaje dynamikę gry. W rozdziale przedstawiono również przejście od akcji na poszczególnych etapach gry do strategii opisującej całościowo plan działania gracza w całej grze.

5.1. Trochę teorii

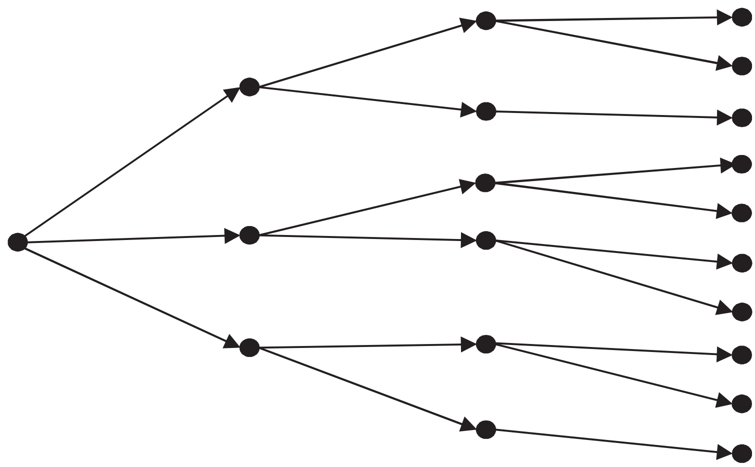
W grze w postaci ekstensywnej mamy pewien zbiór graczy $P = \{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$, przy czym gracz o numerze 0 to Natura, która nie musi uczestniczyć w grze. W przeciwieństwie do innych graczy, Natura wybiera posunięcia (akcje) w sposób losowy i znany jest rozkład prawdopodobieństwa możliwych akcji.

Gra jest opisana na **drzewie gry**, czyli zbiorze **wierzchołków** i **gałęzi**. Istnieje pewien **wierzchołek początkowy** w_0, w którym gra się zaczyna. Z wierzchołków mogą wychodzić gałęzie do kolejnych wierzchołków – wyjątkiem są **wierzchołki końcowe**. Przykład takiej struktury jest przedstawiony na rysunku 5.1. Wierzchołki reprezentują pewne sytuacje w grze (etapy gry), a gałęzie to możliwe posunięcia graczy na danym etapie gry. Zbiór wierzchołków oznaczamy przez W, a przez G oznaczymy zbiór gałęzi. Niech W_K będzie zbiorem wierzchołków końcowych drzewa. Na każdym etapie gry posunięcie należy do któregoś z graczy. Zatem każdy wierzchołek, oprócz wierzchołków końcowych, jest przyporządkowany pewnemu graczowi. Istnieje więc funkcja

$$p: W \backslash W_K \rightarrow P.$$

Zazwyczaj przyjmuje się, że jeśli jednym z graczy jest Natura, to wykonuje swój ruch na samym początku gry, ustalając od razu wszystkie możliwe czynniki losowe.

Przez W_i oznaczmy zbiór wszystkich wierzchołków przypisanych do gracza i, a przez G_i oznaczmy zbiór wszystkich gałęzi zaczynających się w wierzchołkach przypisanych do gracza i (tj. należących do W_i).



Rysunek 5.1. Drzewo

Każdy gracz ma pewien zbiór **akcji** (posunięć), które może wykonać. Zbiór akcji gracza i oznaczamy przez A_i. Niech $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$ będzie zbiorem wszystkich możliwych akcji wszystkich graczy. Akcje te są reprezentowane przez gałęzie, a więc istnieje odpowiednia funkcja przyporządkowująca gałęziom drzewa gry odpowiednie akcje graczy

$a: G \rightarrow A,$

przy czym funkcja a ma tę własność, że jeżeli gałąź g wychodzi od wierzchołka przypisanego do gracza i, to akcja związana z tą gałęzią jest akcją gracza i:

$g \in G_i \Rightarrow a(g_i) \in A_i.$

Również wierzchołkom (oprócz wierzchołków końcowych) można przypisać możliwe akcje. Przez $\alpha(w)$ oznaczmy zbiór wszystkich akcji przypisanych gałęziom wychodzącym z wierzchołka w.

Informacja dostępna dla gracza i jest opisana za pomocą **zbiorów informacyjnych**. Zakłada się, że zbiór wierzchołków W_i, w których gracz i podejmuje decyzje, jest podzielony na pewną liczbę rozłącznych podzbiorów. Oznaczmy zbiór wszystkich tych podzbiorów dla gracza i przez I_i. Mamy zatem

$W_i = \bigcup_{B \in I_i} B$

oraz $B \cap C = \emptyset$, jeśli $B, C \in I_i$ i $B \neq C$. Zbiory informacyjne mają następującą interpretację: gracz wie zawsze jedynie, w którym zbiorze informacyjnym się znajduje. Nie jest w stanie odróżnić od siebie wierzchołków należących do zbioru informacyjnego. Jeśli więc $w, w' \in I_i$, to gdy na pewnym etapie gry gracz i będzie wiedział, że znajduje się w zbiorze informacyjnym I_i, nie będzie miał wiedzy o tym, czy znajduje się w wierzchołku w, czy w wierzchołku w'. Oczywiście, w związku z tym wierzchołki te muszą być w pewien sposób do siebie podobne

– możliwe do podjęcia przez gracza akcje w obu tych wierzchołkach powinny być takie same (inaczej gracz byłby w stanie odróżnić wierzchołki). Zatem zbiory informacyjne spełniają warunek

$$w, w' \in I_i \Rightarrow \alpha(w) = \alpha(w').$$

Można zatem równie dobrze uznać, że funkcja α przypisuje zbiorom informacyjnym akcje, jakie można w danym zbiorze podjąć.

Zbiory informacyjne mogą być zbiorami jednoelementowymi – gracz wówczas zawsze wie, w jakim wierzchołku drzewa się znajduje. Jeśli wszystkie zbiory informacyjne wszystkich graczy są jednoelementowe, jest to **gra z pełną informacją**. Na drzewie gry zbiory informacyjne zaznacza się przerywanymi liniami łączącymi wierzchołki należące do tego samego zbioru.

Wierzchołki końcowe oznaczają zakończenie gry. W tym momencie ustalane są wypłaty graczy. Istnieje zatem funkcja przypisująca każdemu wierzchołkowi końcowemu wypłaty wszystkich graczy (oprócz Natury, która nie ma żadnych wypłat):

$$\pi: W_K \to \mathbf{R}^n.$$

Ramka poniżej zawiera podsumowanie opisu gry w postaci ekstensywnej.

Gra w postaci ekstensywnej składa się z:

- drzewa gry – wierzchołków i gałęzi,
- funkcji p przypisującej każdy wierzchołek (oprócz wierzchołków końcowych) jednemu z graczy,
- zbiorów informacyjnych grupujących wierzchołki przypisane temu samemu graczowi,
- funkcji przypisującej zbiorom informacyjnym akcje, jakie gracz może podjąć w danym zbiorze,
- funkcji wypłaty przypisującej każdemu wierzchołkowi końcowemu wypłaty wszystkich graczy.

Grę w postaci ekstensywnej można przedstawić graficznie (przynajmniej w teorii, bo dla wielu gier odpowiedni rysunek byłby zbyt duży). Następna ramka zawiera zasady interpretacji różnych elementów takich schematów gier. Przykłady takich rysunków znajdują się w podrozdziale 5.2.

Interpretacja elementów schematu gry
- Wierzchołek drzewa – stan w grze.
- Gałąź drzewa – możliwa akcja (działanie).
- Liczba lub napis przy wierzchołku – numer lub nazwa gracza, któremu wierzchołek jest przyporządkowany.
- Napis przy gałęzi – nazwa możliwej akcji.
- Linia przerywana – łączy wierzchołki w tym samym zbiorze informacyjnym.
- Liczby przy wierzchołkach końcowych – wypłaty poszczególnych graczy.

Rozgrywka zaczyna się w węźle początkowym. Gracz, któremu ten węzeł jest przypisany, wybiera jedną z możliwych akcji. Gałąź związana z tą strzałką prowadzi do następnego wierzchołka. Następnie akcję wybiera gracz, który jest przypisany do tego wierzchołka itd. Wynik końcowy (do którego wierzchołka końcowego dojdziemy) zależy od akcji podejmowanych przez graczy. Można na to jednak spojrzeć w inny sposób, zakładając że każdy gracz już na początku wie, jaką decyzję podejmie w każdym wierzchołku drzewa. Należy jednak pamiętać, że nie jest on w stanie odróżnić wierzchołków w tym samym zbiorze informacyjnym. Zatem planując swe przyszłe decyzje, musi ustalić raczej to, jakie decyzje podejmie w każdym zbiorze informacyjnym.

Strategia s_i gracza i to funkcja przypisująca każdemu zbiorowi informacyjnemu tego gracza pewną akcję, którą gracz może podjąć w tym zbiorze informacyjnym: $s_i\colon I_i \to A_i$, przy czym $s_i(B) \in \alpha(B)$ dla każdego $B \in I_i$.

Strategia to zatem „plan działania" gracza zawierający wskazania dotyczące działań gracza w każdej sytuacji, w której może się on znaleźć w grze. Można to też sobie przedstawić jako zestaw instrukcji, jakie gracz przekazuje pośrednikowi, który będzie działał w jego imieniu. Aby taki zbiór instrukcji był strategią, pośrednik nie może się znaleźć w sytuacji, w której nie wiedziałby, jakie działanie ma podjąć. Zbiory możliwych strategii S_i, wprowadzone w rozdziale 2, to zatem zbiory wszystkich możliwych „przepisów" dla gracza. Podkreślimy jeszcze raz różnicę między akcjami (posunięciami) gracza a strategiami.

Akcja to coś, co gracz może zrobić w konkretnej sytuacji w grze.

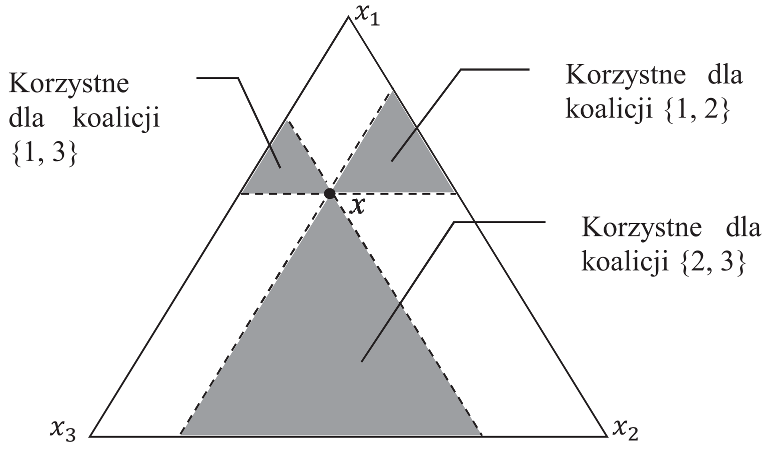
Strategia to plan przedstawiający zamierzone odpowiedzi gracza na każdą sytuację, która może się pojawić w grze.

Przedstawienie gry w postaci ekstensywnej pozwala na lepszą eliminację strategii zdominowanych. Rozważmy dowolny wierzchołek poprzedzający wierzchołki końcowe. Wierzchołek ten jest przypisany do pewnego gracza i należy do pewnego jego zbioru informacyjnego B. Jeżeli dla wszystkich wierzchołków należących do zbioru B pewna akcja przyniesie wyższą wypłatę, to racjonalny gracz z pewnością wybierze tę akcję. Tym samym wiadomo już, jakie będzie jego posunięcie w ostatniej „turze" gry. Można to wykorzystać do analizy decyzji gracza, który dokonywał wyboru wcześniej – wie on, co zrobi gracz dokonujący wyboru po nim i dzięki temu może ustalić, jakie wypłaty otrzyma z podjętych akcji. Jeżeli w pewnym zbiorze informacyjnym jakaś akcja przynosi zawsze wyższe wypłaty, to „przedostatni" gracz wybierze tę akcję, co ułatwia analizę decyzji gracza dokonującego wyboru wcześniej itd. Metoda ta pozwala też na uproszczenie analizy gry, nawet w sytuacji gdy żadna z akcji nie daje jednoznacznie wyższej wypłaty. Gdy akcja w pewnym zbiorze informacyjnym prowadzi zawsze do wypłat niższych niż jakaś inna akcja dostępna w tym zbiorze, można ją usunąć ze zbioru dostępnych akcji i rozważać dalej tak „okrojoną" grę. Tę metodę analizy gry nazywa się **indukcją wsteczną** (*backward induction*). Akcje, które pozostały, tworzą strategie w równowadze.

Taka analiza za pomocą indukcji wstecznej jest szczególnie ważna w grach z pełną informacją, gdy zbiory informacyjne są jednoelementowe. Prowadzi do algorytmu nazywanego **przycinaniem drzewa** (*pruning*) lub **algorytmem alfa-beta**. Jeżeli wypłaty dowolnego gracza są różne w każdym węźle końcowym lub jeśli jest to gra dwuosobowa o sumie zerowej, stosując tę metodę, można „rozwiązać" każdą grę. We wszystkich wierzchołkach drzewa gry poprzedzających wierzchołki końcowe można wtedy ustalić, jaką akcję wybierze tam gracz podejmujący decyzję. Można zatem każdemu z tych wierzchołków przypisać wypłatę dla każdego z graczy, ponieważ wiadomo, co zdarzy się w ostatniej „turze" gry. Wierzchołki te staną się zatem wierzchołkami końcowymi w nowej, „przyciętej" grze. Procedurę tę można powtarzać tak długo, aż pozostanie tylko wierzchołek początkowy, a wyznaczone w nim wypłaty będą wyrażać „wartość" gry dla każdego z graczy, przy założeniu, że zarówno on, jak i inni stosują zawsze najlepsze akcje w danej sytuacji.

W wypadku gier wieloosobowych, w których wypłaty graczy w pewnych wierzchołkach końcowych są takie same, rozwiązanie nie jest jednoznaczne. W pewnych wierzchołkach istnieje więcej niż jedna akcja prowadząca do najlepszego wyniku. Jednak rozwiązanie istnieje. Akcje, które zostały wybrane jako najlepsze dla wierzchołków, tworzą równowagę Nasha. Zatem prawdziwe jest twierdzenie podane w ramce.

Twierdzenie 5.1 (Kuhn). Każda gra z pełną informacją ma równowagę Nasha w strategiach czystych.

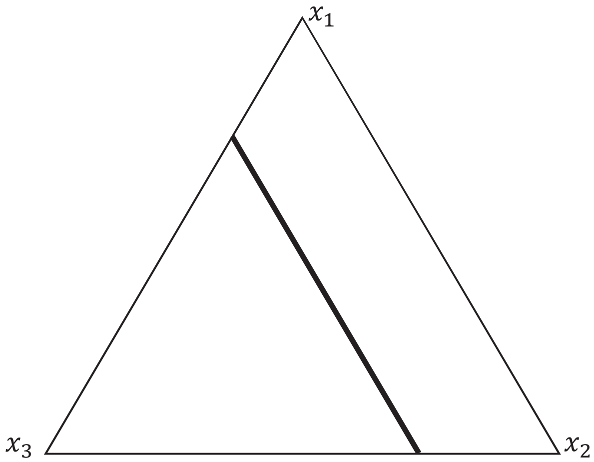


Rysunek 8.2. Imputacja w grze „podział dolara"

W grze o pustym rdzeniu można próbować znaleźć zbiory stabilne – określające pewne normy społeczne charakteryzujące się zewnętrzną i wewnętrzną stabilnością (patrz pkt 8.1.2). Jak łatwo można zauważyć, żaden zbiór złożony z jednego punktu nie jest zbiorem stabilnym. W którymkolwiek punkcie trójkąta równobocznego umieści się dany punkt, zawsze pojawi się szary obszar imputacji dominujących.

Jeśli dowolny punkt należy do zbioru stabilnego, to do zbioru tego mogą należeć tylko punkty znajdujące się na kreskowanych liniach z rysunku 8.2. Należy jeszcze zapewnić, by zbiór spełniał warunki zewnętrznej i wewnętrznej stabilności. Jak można łatwo sprawdzić, spełnia je zbiór złożony z trzech imputacji $A = \{(0{,}5,\ 0{,}5,\ 0), (0{,}5,\ 0,\ 0{,}5), (0, 0{,}5,\ 0{,}5)\}$. Imputacje te zakładają, że koalicja złożona z dowolnych dwóch graczy dzieli wypłaty pomiędzy siebie po połowie.

Innym rodzajem zbiorów stabilnych w tej grze są zbiory złożone z punktów na jednej z kreskowanych linii z rysunku 8.2. Dowolny zbiór punktów z jednej z takich linii spełnia warunek wewnętrznej stabilności – żadna imputacja ze zbioru nie dominuje nad inną. Aby zbiór spełniał warunek zewnętrznej stabilności, musi to być cała taka linia. Przykład zbioru stabilnego tego rodzaju jest przedstawiony na rysunku 8.3. Zbiory takie mają następującą interpretację: jeden z graczy otrzymuje zawsze ustaloną wypłatę. Reszta, która pozostaje po wynagrodzeniu tego gracza, jest przedmiotem negocjacji pomiędzy dwoma pozostałymi graczami. W przykładzie na rysunku 8.3 gracz 3 otrzymuje zawsze 30 centów. Podział pozostałych 70 centów podlega negocjacji między graczami 1 i 3.



Rysunek 8.3. Zbiór stabilny w grze „podział dolara"

Jak łatwo można sprawdzić, nukleolus w tej grze stanowi imputacja $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, w której dolar dzielony jest równo między trzech graczy. Przekroczenie dla każdej koalicji dwuosobowej wynosi $\frac{1}{3}$. Zmiana imputacji na inną spowodowałaby zmniejszenie wartości przekroczenia dla jednej lub dwóch koalicji dwuosobowych, ale jednocześnie zwiększyłaby wartość przekroczenia dla przynajmniej jednej z takich koalicji. W punkcie $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ maksymalne przekroczenie jest więc najmniejsze.

8.2.3. Koalicje oligopolistów

Rozważmy rynek, na którym istnieje n firm, taki jak w przykładzie 3.2.6. Jak pokazaliśmy w tym przykładzie, gdy na rynku jest n konkurujących ze sobą firm, każda z nich ma ten sam, stały koszt krańcowy c, a funkcja ceny jest równa $P = a - Q$ (gdzie Q to łączna podaż wszystkich firm, $Q = q_1 + \cdots + q_n$), to w równowadze Nasha każda firma produkuje $q_i^{(n)} = \frac{a-c}{n+1}$, a zatem łączna produkcja wynosi $Q^{(n)} = \frac{n(a-c)}{n+1}$. Cena towaru wynosi $P^{(n)} = \frac{a-cn}{n+1}$, a zysk każdego z przedsiębiorstw jest równy $\pi^{(n)} = \left(\frac{a-c}{n+1}\right)^2$.

Załóżmy, że firmy mogą tworzyć koalicję w celu ustalenia wspólnej polityki podażowej. Rozważmy koalicję złożoną z k przedsiębiorstw. Graczami na rynku jest zatem koalicja oraz pozostałe $n - k$ firm. Najgorszym przypadkiem dla koalicji jest sytuacja, gdy pozostałe przedsiębiorstwa nie prowadzą wspólnej polityki, ale każde z nich działa, starając się zmaksymalizować własny zysk. W takim przypadku na rynku jest najwięcej graczy, a jak wiadomo z przykładu 3.2.6, im więcej graczy, tym mniejszy jest zysk każdego z nich. W najgorszej możliwej sytuacji na rynku działa $n - k + 1$ graczy (koalicja i wszyscy poza nią). Zysk każdego gracza wynosi $\pi^{(n-k+1)} = \left(\frac{a-c}{n-k+2}\right)^2$. Jest to zatem także wypłata koalicji. Funkcja charakterystyczna ma więc postać $w(S) = \left(\frac{a-c}{n-k+2}\right)^2$ dla koalicji S złożonej z k graczy.

Wypłaty wszystkich graczy można podzielić przez $\left(\frac{a-c}{2}\right)^2$, otrzymuje się w ten sposób grę równoważną grze wyjściowej, której funkcją charakterystyczną jest[21]

$$\nu(S) = \left(\frac{2}{n-k+2}\right)^2.$$

W przypadku tej gry $\nu(P) = 1$.

Należy zauważyć, że gra nie jest superaddytywna. Na przykład dla $n = 5$ koalicja złożona tylko z gracza nr 1 otrzyma wypłatę $\frac{1}{9}$. Koalicja złożona z drugiego i trzeciego gracza otrzyma wypłatę $\frac{4}{25}$, natomiast koalicja $\{1, 2, 3\}$ otrzyma wypłatę $\frac{1}{4}$, czyli mniej, niż wynosi suma wypłat dwóch pierwszych koalicji. W tym przypadku nie zakładaliśmy bowiem, że gracze spoza koalicji zjednoczą się i wybiorą posunięcie, które jak najbardziej zaszkodzi koalicji. Zamiast tego przyjęliśmy, że gracze spoza koalicji starają się maksymalizować swoje indywidualne zyski.

Rozważmy przypadek, gdy na rynku są tylko cztery przedsiębiorstwa. Gra jest symetryczna, więc wystarczy wyznaczyć wartość funkcji charakterystycznej dla koalicji złożonej z zera, jednego, dwóch, trzech i czterech graczy. Oznaczamy je odpowiednio przez $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_4$. Mamy $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = \frac{4}{25}$, $\nu_2 = \frac{1}{4}$, $\nu_3 = \frac{4}{9}$ i $\nu_4 = 1$. Jak łatwo sprawdzić, gra jest superaddytywna, a nawet wypukła. Gra ma niepusty rdzeń. Na przykład imputacja $x = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, w której gracze dzielą się rynkiem po równo, jest elementem rdzenia – spełnia wszystkie potrzebne warunki.

Można pokazać, choć jest to trochę bardziej skomplikowane, że dla dowolnej liczby firm na rynku n gra ma niepusty rdzeń, do którego należy imputacja, w której gracze dzielą się rynkiem po równo – każdy otrzymuje $\frac{1}{n}$.

---

[21] Nie jest to postać znormalizowana gry, ponieważ wypłaty koalicji jednoosobowych nie są równe 0. Grę można znormalizować, ale wówczas funkcja charakterystyczna będzie miała bardziej skomplikowaną postać.

8.2.4. Zanieczyszczanie jeziora

Na brzegu pewnego jeziora znajduje się 5 wiosek. Mieszkańcy każdej z nich wypuszczają ścieki z kanalizacji do jeziora. Mogą je najpierw oczyszczać, ale kosztuje to 70 tys. zł. Spuszczanie nieoczyszczonych ścieków do jeziora nic nie kosztuje.

Pojawia się jednak problem z wodą pitną, którą pobiera się z jeziora. Gdyby jezioro nie było zanieczyszczone, można by pobierać wodę bez uzdatniania jej do picia. Wodę z zanieczyszczonego jeziora trzeba uzdatniać, a koszt tej czynności rośnie wraz z poziomem zanieczyszczeń. Koszt uzdatniania wynosi 20 tys. zł razy liczba wiosek, które zanieczyszczają jezioro.

Jest to gra pięcioosobowa. Rozważmy najpierw uogólnioną wersję tej gry, zakładając, że jest n wiosek, a więc jest to gra n-osobowa. Weźmy koalicję złożoną z m wiosek ($m \leq n$). Najgorszą sytuacją dla koalicji jest, gdy wszystkie wioski spoza koalicji spuszczają do jeziora nieoczyszczone ścieki. Ustalmy, jaką wypłatę może osiągnąć koalicja – przy czym wypłata jest wartością przeciwną do łącznych kosztów (oczyszczania i uzdatniania) ponoszonych przez wioski koalicji. Powiedzmy, że w m-osobowej koalicji ścieki oczyszcza k wiosek, gdzie $k \leq m$. Pozostałe $m - k$ wiosek spuszcza nieoczyszczone ścieki. Zatem łącznie k wiosek oczyszcza ścieki, a $n - k$ wiosek spuszcza nieoczyszczone ścieki. Koszty uzdatniania wody w każdej z wiosek wynoszą zatem $2(n - k)$. Łączne koszty koalicji to koszty oczyszczania (we wszystkich wioskach koalicji) i koszty uzdatniania wody pitnej (też we wszystkich wioskach koalicji). Wynoszą one zatem $7k + 2m(n - k) = 2mn + (7 - 2m)k$. Jeśli zatem $7 - 2m > 0$, to koalicja ma najmniejsze koszty dla $k = 0$ (nikt nie oczyszcza ścieków). Wynoszą one wówczas $2mn$. Natomiast gdy $7 - 2m < 0$, najmniejsze koszty są osiągane przy jak największym k, czyli $k = m$ (wszyscy członkowie koalicji oczyszczają ścieki). Koszty wynoszą wówczas $2mn + (7 - 2m)m = (2n + 7 - 2m)m$. Następująca funkcja podaje najmniejsze koszty c_m ponoszone przez koalicję złożoną z m wiosek:

$$c_m = \begin{cases} 2mn & \text{dla } m < \frac{7}{2}, \\ (2n + 7 - 2m)m & \text{dla } m > \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Aby koalicji opłacało się oczyszczać ścieki, musi składać się co najmniej z 4 wiosek. W przypadku gry pięcioosobowej ($n = 5$) prowadzi to do następującej funkcji charakterystycznej (v_m oznacza wartość funkcji dla dowolnej koalicji złożonej z m graczy):

$$v_0 = 0, v_1 = -10, v_2 = -20, v_3 = -30, v_4 = -36, v_5 = -35.$$

Grę można przekształcić do postaci równoważnej, dodając 10 do wypłaty każdego gracza. Funkcją charakterystyczną równoważnej gry jest

$$v_0 = 0, v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0, v_4 = 4, v_5 = 15.$$

Ta postać gry pokazuje, że efekt synergii ujawnia się dopiero w koalicjach co najmniej czteroosobowych.

Gra posiada niepusty rdzeń. Należy do niego na przykład imputacja (3, 3, 3, 3, 3), która oznacza, że wioski równo dzielą się kosztami oczyszczania (każda wioska ponosi koszt 7). Istnieje jednak jeden problem, który nie jest widoczny w postaci koalicyjnej tej gry. Gdy zawiązała się koalicja 5 wiosek, dla każdego jej członka bardzo korzystne jest opuszczenie koalicji (i spuszczanie nieoczyszczonych ścieków). Wówczas może obniżyć swoje koszty z 7 do 2. Gra ta stanowi zatem przykład wieloosobowego dylematu więźnia – najbardziej opłacalna jest współpraca wszystkich graczy, ale przy takiej współpracy każdy ma silną motywację do zerwania współpracy.

8.2.5. Rynek butów

Na rynku jest n szewców, którzy wykonali prawe buty (każdy po jednym), i m szewców, którzy uszyli buty lewe (znów – każdy po jednym). Buty są tego samego kroju i rozmiaru, ale klient zapłaci tylko za parę butów, a nie za jeden but. Przyjmujemy, że jedna para jest warta 1. Wypłata koalicji jest więc równa liczbie par „prawych" i „lewych" szewców, którzy wchodzą w skład koalicji.
Załóżmy, że $m < n$, czyli mniej jest szewców z lewymi butami. Wartość funkcji charakterystycznej dla wielkiej koalicji, złożonej z wszystkich graczy, wynosi wówczas $v(P) = m$. Imputacje powinny więc spełniać warunek $x_1 + \cdots + x_{m+n} = m$. Załóżmy, że szewcy z prawymi butami mają numery od 1 do n, a szewcy z butami lewymi mają numery od $n + 1$ do $m + n$.

Rozważmy koalicję S złożoną ze wszystkich graczy z wyjątkiem gracza j, który ma prawy but (tj. $1 \leq j \leq n$). Wartość funkcji charakterystycznej takiej koalicji wynosi $v(S) = m$, czyli tyle samo, ile wynosi wypłata koalicji złożonej z wszystkich graczy. Jeżeli $x_j > 0$, to

$$\sum_{i=1}^{m+n} x_i - x_j < \sum_{i=1}^{m+n} x_i = m = v(S),$$

a więc taka imputacja jest zdominowana. Oznacza to, że $x_j = 0$ dla $j \leq n$, czyli szewcy z prawymi butami nie dostaną nic.

Rozważmy koalicję gracza $j > n$ (szewca z lewym butem) z dowolnym graczem $i \leq n$ (z szewcem z prawym butem). Wypłata tej koalicji wynosi 1. Wiadomo też, że $x_i = 0$, a zatem $x_j = 1$.

Zatem jedynym elementem rdzenia jest imputacja, w której wszyscy szewcy z lewymi butami dostają wypłatę 1, a wszyscy szewcy z prawymi butami dostają wypłatę 0. Jest to jedyna imputacja stabilna, a logika kryjąca się za tym rozwiązaniem jest następująca: na rynku jest zbyt wiele prawych butów w stosunku do butów lewych. Jednak z drugiej strony taki podział jest mniej intuicyjny w sytuacji, gdy graczy jest bardzo wielu, a różnica w liczebności jest niewielka. Jeśli na rynku jest 100 tys. szewców z lewymi butami, a prawe buty oferuje 100 tys. i jeden szewc, to zgodnie z przedstawionym rozumowaniem wypłatę powinni otrzymywać jedynie ci pierwsi.

Bardziej równomierny rozdział wypłat zapewnia wartość Shapleya, która uwzględnia „sprawiedliwość" rozwiązania. Ponieważ wyznaczenie tej wartości w ogólnym przypadku jest skomplikowane, rozważymy przykład z trzema szewcami z prawymi butami i dwoma szewcami z butami lewymi. Ze względu na symetrię tej wartości wystarczy rozważyć dowolnego z graczy. Weźmy zatem dowolnego szewca oferującego lewy but, L_1. Koalicje, w których wnosi on wartość dodatkową, są postaci $\{L_1, P\}$, $\{L_1, P, P\}$, $\{L_1, P, P, P\}$, $\{L_1, L_2, P, P\}$, $\{L_1, L_2, P, P, P\}$, gdzie P oznacza dowolnego szewca z prawym butem, a L_2 to drugi szewc oferujący but lewy. Aby wyznaczyć wartość Shapleya, należy ustalić liczbę koalicji każdego rodzaju, a następnie podstawić odpowiednie wartości do wzoru. Obliczenia znajdują się w tabeli poniżej.

Rodzaj Koalicji	Liczba koalicji	s	$(s-1)!$	$(n-s)!$
$\{L_1, P\}$	3	2	1	6
$\{L_1, P, P\}$,	3	3	2	2
$\{L_1, P, P, P\}$	1	4	6	1
$\{L_1, L_2, P, P\}$	3	4	6	1
$\{L_1, L_2, P, P, P\}$	1	5	24	1

Na przykład są trzy koalicje typu $\{L_1, P\}$, ponieważ szewca z prawym butem można dobrać na trzy sposoby. Liczba graczy w tej koalicji to $s = 2$. Pozostałe wartości potrzebne do obliczenia wartości Shapleya znajdują się w kolejnych kolumnach tabeli. Ostatecznie wartość Shapleya dla gracza L_1 wynosi

$$\varphi_1 = \frac{1}{5!}(3 \cdot 1 \cdot 6 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + 3 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot 24 \cdot 1) = \frac{78}{120} = 0{,}65.$$

Ze względu na symetrię wartości Shapleya wartość dla drugiego szewca z prawym butem również wynosi $\varphi_2 = 0{,}65$. Wypłata „wielkiej koalicji" złożonej ze wszystkich graczy wynosi 2. Szewcy oferujący lewe buty otrzymują razem 1,3. Pozostałe 0,7 pozostaje do podziału między szewców oferujących prawe buty. Ze względu na symetrię, każdy z nich dostanie równy udział. Zatem wartości Shapleya określają następującą imputację:

$$\left(\frac{13}{20}, \frac{13}{20}, \frac{7}{30}, \frac{7}{30}, \frac{7}{30}\right).$$