

S T E V E N
S T R O G A T Z

P O T Ę G A
N I Ę S K O Ń C Z O N O Ś C I

Jak rachunek różniczkowy
i całkowy odkrywa
tajemnice wszechświata

Tłumaczenie: Tadeusz Chawziuk



Rozdział 1

Nieskończoność

Źródła matematyki leżą w zainteresowaniach praktycznych¹. Pasterze potrzebowali znać liczebność stad. Rolnicy musieli umieć ważyć ziarno zebrane podczas żniw. Poborcy podatków chcieli określać, ile krów czy kur powinien oddać królowi każdy wieśniak. Z takich codziennych potrzeb wyrósł wynalazek liczby. Na początku liczono za pomocą palców u rąk lub nóg. Potem wycinano liczby na kościach zwierząt. W miarę jak ich przedstawienie rozwijało się od prostych nacięć do symboli, liczby wszystko ułatwiały – od handlu i zbierania podatków po księgowość i urzędowe spisy. Świadczenia tego widzimy na glinianych tabliczkach z Mezopotamii, które zapisano ponad pięć tysięcy lat temu rzędami symboli w kształcie klinów, skąd wzięła się nazwa *pismo klinowe*.

Poza liczbami miały znaczenie także kształty. W starożytnym Egipcie pomiar kątów i długości był niezwykle ważny. Każdego roku geometryści musieli na nowo rysować granice pól zatarte przez letnie wylewy Nilu. Od czynności tej pochodzi nazwa badania kształtów jako takich, to jest geometrii: po grecku *ge* oznacza „ziemia” i *metres* – „mierniczy”.

Na początku geometria miała sztywne krawędzie i kąty ostre. Jej upodobanie do prostych linii, płaszczyzn i kątów było odzwierciedleniem jej utylitarnej roli: trójkąty służyły za równie pochyłe, piramidy za pomniki i grobowce, a prostokąty za blaty stołów, ołtarze i pola uprawne. Budowniczy i cieśle wykorzystywali kąty proste do wyznaczania pionu. Dla żeglarzy, architektów i kapłanów znajomość geometrii linii prostej była niezbędna do pomiarów odległości,

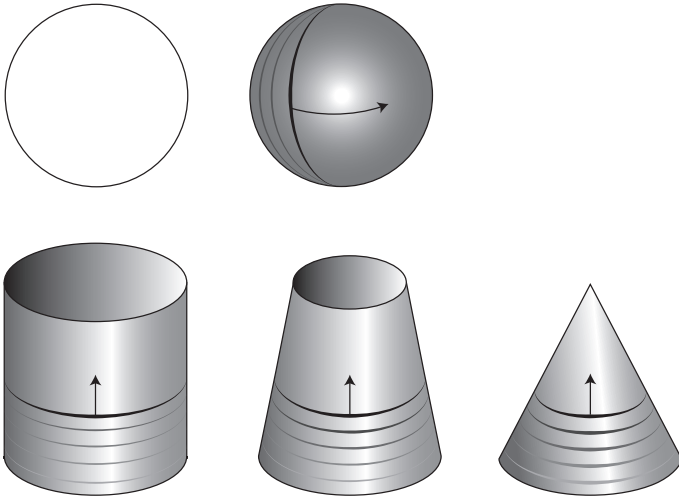
w nawigacji, przy określaniu daty, przewidywaniu zaćmień oraz budowaniu miejsc kultu.

Nawet gdy geometria zafiksowała się na linii prostej, jedna krzywa zawsze zajmowała wyróżnione miejsce – ten najdoskonalniejszy kształt ze wszystkich: okrąg. Widzimy okręgi w słojach drzew, falach rozchodzących się na powierzchni stawu, kształcie Słońca i Księżyca. Okręgi zewsząd otaczają nas w przyrodzie. A gdy patrzymy na okręgi, one literalnie patrzą na nas. Odnajdujemy je w oczach bliskich, w okrągłych obrysach ich źrenic i tęczy. Okręgi są w rzeczach praktycznych i w rzeczach sentymentalnych, jako koła pojazdów lub pierścionki ślubne. Mają także mistyczne znaczenie. Ich wieczne powracanie przywodzi na myśl odmiany pór roku, reinkarnację, życie wieczne i miłość bez kresu. Nic dziwnego, że okręgi przyciągają naszą uwagę, odkąd ludzkość bada kształty.

Z matematycznego punktu widzenia okręgi są ucieleśnieniem zmiany bez zmiany. Punkt wędrujący po okręgu zmienia kierunek ruchu, ale nie zmienia odległości do środka okręgu. Jest to minimalna postać zmiany, najmniejszy możliwy stopień zmieniania się i zakrzywiania. Ponadto okręgi są oczywiście symetryczne. Gdy okrąg obróci się dookoła swojego środka, nadal wygląda tak samo. Symetria obrotowa tłumaczy, dlaczego okręgi spotyka się wszędzie. Gdy tylko jakiemuś aspektowi przyrody jest obojętny kierunek, muszą pojawić się okręgi. Zobaczmy, co się dzieje, gdy kropla deszczu uderza w powierzchnię kałuży: niewielkie fale zaczynają odbiegać od miejsca zderzenia. Ponieważ fale przemieszczają się z jednakową prędkością we wszystkich kierunkach i wychodzą z tego samego punktu, *muszą* one tworzyć okręgi. Wymaga tego symetria.

Okręgi mogą również dawać początek innym zakrzywionym kształtom. Gdy wyobrazimy sobie, że nadziewamy okrąg na pręt wzdłuż jego średnicy i obracamy wokół tej osi w przestrzeni trójwymiarowej, obracający się okrąg zakreśli sferę, czyli powierzchnię globu lub piłki. Gdy przesuwamy okrąg w pionie wzdłuż prostej prostopadłej do jego płaszczyzny, po-

wstaje walec, czyli kształt puszki lub pudła na kapelusz. Jeżeli okrąg będzie się zmniejszał przy przesuwaniu pionowym, dostaniemy stożek; a jeżeli będzie się powiększał, dostaniemy stożek ścięty (kształt abażuru).



Okręgi, kule, walce i stożki były obiektami fascynacji pierwszych geometrów, ale okazały się znacznie trudniejsze w badaniu niż trójkąty, prostokąty, kwadraty, sześciąty i inne kształty utworzone z linii prostych i płaskich powierzchni. Próbowali oni rozważać pola zakrzywionych powierzchni i objętości zakrzywionych brył, lecz nie mieli pojęcia, jak takie problemy rozwiązywać. Okrągłości przechodziły ich siły.

Pomost nieskończoności

Rachunek różniczkowy i całkowy narodził się jako odnoga geometrii². Około 250 p.n.e. roku w starożytnej Grecji był prężnym, choć malutkim start-upem, stawiającym sobie za cel

odkrycie tajemnicy krzywych. Ambitny plan jego orędowników polegał na wykorzystaniu nieskończoności jako pomostu między tym, co zakrzywione, i tym, co proste. Ufali oni, że gdy ustali się ten związek, metody i techniki geometrii linii prostej będą mogły być przerzucone przez ten pomost i użyte do zgłębienia tajemnicy krzywych. Za pomocą nieskończoności spodziewano się rozwiązać wszystkie stare problemy. Taki przynajmniej był zamysł.

W tamtym czasie wszystko to mogło robić wrażenie puistej spekulacji. Nieskończoność nie miała dobrej opinii. Częściej budziła lęk, niż była uważana za coś, co się przydaje. Co gorsze, była pojęciem mglistym i nieprzeniknionym. Bo czymże ona jest? Liczbą? Miejscem? Pojęciem?

Niemniej, jak przekonamy się niebawem oraz w kolejnych rozdziałach tej książki, nieskończoność okazała się darem niebios. Biorąc pod uwagę niezliczone odkrycia i techniki, które zawdzięczają swe istnienie ostatecznie rachunkowi różniczkowemu i całkowemu, pomysł użycia nieskończoności do rozwiązania złożonych problemów geometrii musi być uznany za jeden z najlepszych w historii.

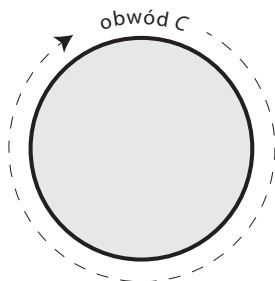
Oczywiście tego nie dało się przewidzieć w roku 250 p.n.e. Nieskończoność jednak zanotowała parę imponujących sukcesów już na samym wstępie. Jednym z pierwszych i najwspanialszych było rozwiązanie zagadki obliczania pola koła.

Dowód z pizzy

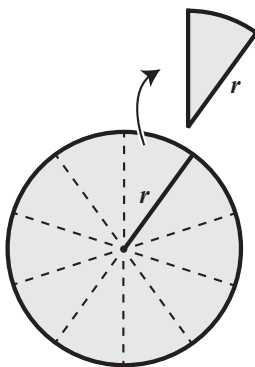
Zanim wdam się w szczegóły, pragnę zarysować główną linię argumentacji. Strategia polega na tym, aby wyobrazić sobie koło jako pizzę. Następnie kroimy pizzę na nieskończenie wiele kawałków i te kawałki magicznie układamy w kształt prostokąta. To nam da poszukiwaną odpowiedź, ponieważ przedstawianie kawałków nie zmienia oczywiście pola powierzchni, a wiemy przecież, jak oblicza się pole prostokąta: po prostu mnoży się

szerokość przez wysokość. W ten sposób otrzymamy wzór na pole koła.

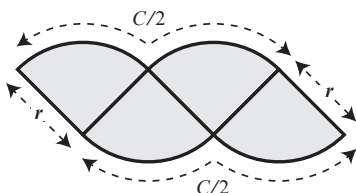
Do celów argumentacji potrzebujemy wyidealizowanej pizzy matematycznej – doskonale płaskiej i okrągłej, o nieskończeniu cienkiej skórce. Jej obwód, który oznaczmy literą C , jest długością drogi wokół pizzy. Obwód zwykle nie jest tym, czym smakosze pizzy zaprzatają sobie głowę, ale jeśli chcemy, możemy zmierzyć C za pomocą taśmy mierniczej.



Inną interesującą wielkością jest r , promień pizzy, zdefiniowany jako odległość od środka do dowolnego punktu na jej brzegu. W szczególności r jest miarą długości prostego boku kawałka pizzy, przy założeniu, że wszystkie kawałki są jednakowe i zostały wycięte od środka w kierunku brzegu pizzy.



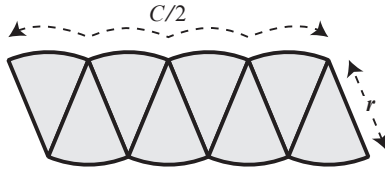
Przypuśćmy najpierw, że dzielimy placek na cztery ćwiartki. Oto jak można je ułożyć, choć ten sposób nie wydaje się za bardzo obiecujący.



Nowy kształt ma nierówny i dziwny wygląd, z tymi półokrągłymi ząbkami z jednej i drugiej strony. Z pewnością nie jest to żaden prostokąt, zatem jego pole trudno byłoby obliczyć. Można odnieść wrażenie, że zamiast iść naprzód, cofamy się. Lecz tak jak w każdej dobrej opowieści, bohater, nim za triumfuje, musi najpierw zmierzyć się przeciwnościami. Napięcie dramatyczne zaczyna narastać.

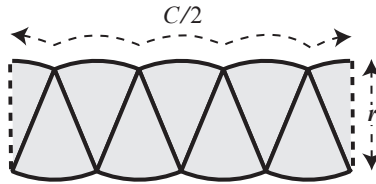
Choć wygląda na to, że utknęliśmy na dobre, zauważmy dwie rzeczy, które okażą się prawdą w całym dowodzie i wskażą sposób wyznaczenia rozmiarów poszukiwanego prostokąta. Pierwsze spostrzeżenie dotyczy tego, że jedna połowa brzegu pizzy stała się górną falistą krawędzią nowego kształtu, a druga połowa – dolną falistą krawędzią. A zatem falista górna krawędź musi mieć długość równą połowie obwodu, czyli $C/2$, i podobnie dolna krawędź, jak widzimy na rysunku. Długość ta, jak zobaczymy, okaże się rozmiarem dłuższego boku prostokąta. Drugą rzeczą, którą należy zauważyć, jest to, że ukośne proste boki nierównego kształtu to po prostu boki wyjściowych kawałków pizzy, mają zatem długość r . Długość ta ostatecznie okaże się rozmiarem krótszego boku prostokąta.

Powodem, dla którego nie dostrzegamy jeszcze poszukiwanego prostokąta, jest to, że nie pokroiliśmy pizzy na dostatecznie wiele kawałków. Gdy pokroimy ją na osiem części i ułożymy je w podobny sposób, nasz kształt zacznie już bardziej przypominać prostokąt.



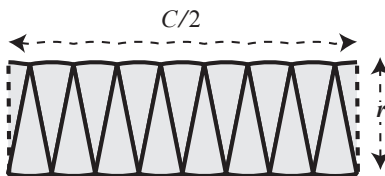
Pizza wygląda teraz jak równoległobok. Nieźle – boki są już prawie proste. Półokrągłe ząbki u góry i u dołu znacznie się teraz zmniejszyły. Wygładziły się, ponieważ użyliśmy większej liczby kawałków pizzy. Jak wcześniej, boki u góry i u dołu mają długość równą $C/2$, podczas gdy boki po lewej i po prawej mają długość r .

Aby uzyskać jeszcze lepszy efekt, rozetniemy ukośny kawałek na końcu na połowy wzdłuż jego długości i ustawimy jedną połowę na drugim końcu.

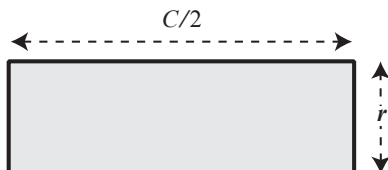


Teraz kształt zdecydowanie przypomina już prostokąt. Wprawdzie nadal nie jest doskonały – przez półokrągłe ząbki u góry i u dołu, których przyczyną jest zakrzywienie brzegu pizzy – lecz widać już, że posuwamy się naprzód.

Skoro mnożenie kawałków wydaje się pomagać, kroimy pizzę dalej. Przy 16 kawałkach i kosmetycznym przecięciu kawałka na końcu, tak jak wcześniej, otrzymujemy następujący rezultat:



Im więcej kawałków używamy, tym bardziej wygładzają się półokrągłe ząbki przeniesione z brzegu pizzy. Nasze manipulacje prowadzą do ciągu kształtów, które w magiczny sposób zbliżają się do pewnego prostokąta. Ponieważ są one coraz bardziej do niego podobne, nazwiemy go prostokątem *granicznym*.



Istota tego postępowania sprowadza się do tego, że łatwo możemy obliczyć pole prostokąta granicznego, mnożąc szerokość przez wysokość. Pozostaje tylko znaleźć jego wysokość i szerokość wyrażone w terminach rozmiaru koła. Otóż jeśli kawałki są ustawione pionowo, to wysokość prostokąta granicznego jest po prostu promieniem koła wyjściowego. Natomiast szerokość jest połową obwodu koła; a to dlatego, że połowa obwodu pizzy została użyta do zbudowania górnego boku prostokąta, a druga połowa – do zbudowania dolnego boku, jak miało to miejsce na każdym etapie pracy z kształtami z półokrągłymi ząbkami. Zatem szerokość prostokąta granicznego jest równa połowie obwodu koła, czyli $C/2$. Łącząc te spostrzeżenia, dochodzimy do wniosku, że pole prostokąta granicznego jest iloczynem wysokości i szerokości, czyli $A = r C/2$. Ponieważ zaś przedstawianie kawałków pizzy nie zmienia ich pola, musi to być również pole koła wyjściowego!

Wzór na pole koła, $A = r C/2$, został wyprowadzony – za pomocą podobnej, ale o wiele staranniejszej argumentacji – przez starożytnego matematyka greckiego Archimedesesa (287–212 p.n.e.) w pracy *O pomiarze koła*.

Najbardziej innowacyjnym aspektem dowodu jest sposób, w jaki na pomoc przychodzi nieskończoność. Kiedy mie-

liśmy 4, 8 lub 16 kawałków, mogliśmy ułożyć pizzę co najwyżej w niedoskonały kształt z półokrągłymi ząbkami. Po tym niezbyt obiecującym początku im więcej braliśmy kawałków, tym bardziej prostokątny dostawaliśmy kształt. Ale dopiero w granicznym przypadku *nieskończenie* wielu kawałków dostaliśmy prawdziwy prostokąt. Oto podstawowa idea rachunku różniczkowego i całkowego: w nieskończoności wszystko staje się prostsze.

Granice i zagadka muru

Granica przypomina cel, którego nie da się osiągnąć. Można się do niej zbliżać, ale nie można do niej dotrzeć. Na przykład w dowodzie z pizzy udawało nam się sprawić, by kształty z półokrągłymi ząbkami były coraz bardziej prostokątne, w ten sposób, że kroiliśmy pizzę na coraz większą liczbę kawałków i odpowiednio je ustawialiśmy. Nigdy jednak nie osiągnęliśmy tego, by były absolutnie prostokątne. Mogliśmy tylko zbliżać się do doskonałości. Na szczęście w rachunku różniczkowym i całkowym nie ma znaczenia nieosiągalność granicy. Często możemy rozwiązywać problemy, wyobrażając sobie, że naprawdę osiągnęliśmy granicę, i wyciągając z tego wyobrażenia wnioski. W istocie wielu pionierów tej gałęzi matematyki tak właśnie postępowało i dzięki temu dokonało wielkich odkryć. Czy takie postępowanie jest logiczne? Nie. Czy jest pomysłowe? Owszem. A czy zostało uwieńczone sukcesem? Niewątpliwie!

Pojęcie granicy jest subtelne, lecz niezwykle doniosłe dla rachunku różniczkowego i całkowego. Jest nieco nieuchwytnie, nieczęsto bowiem stykamy się z nim w życiu codziennym. Być może dobrą analogią będzie tak zwana zagadka muru. Jeżeli przejdziemy połowę drogi do muru, potem połowę pozostałej drogi, a następnie kolejną połowę i tak dalej, to czy po którymś kroku dojdziemy w końcu do muru?

z półokrągłymi ząbkami przybliżające się do granicznego prostokąta), jest to tak, jakby bohater dążył do czegoś, co jest niemożliwe, ale z czym wiąże nadzieje na powodzenie, zachęcany postęпами w przybliżaniu się do niedostępnej gwiazdy.