Jacek **Kabziński**
Przemysław **Mosiołek**

Projektowanie nieliniowych układów sterowania

PWN

Projektowanie nieliniowych układów sterowania

Komitet Automatyki i Robotyki
Polskiej Akademii Nauk

Monografie
Tom 22

Jacek **Kabziński**
Przemysław **Mosiołek**

Projektowanie nieliniowych układów sterowania

PWN

Projekt okładki i stron tytułowych: **Przemysław Spiechowski**

Fotografia na okładce: **Shutterstock/Ruslan Gi**

Wydawca: **Adam Filutowski**

Koordynator ds. redakcji: **Renata Ziółkowska**

Redaktor: **Maria Kasperska**

Produkcja: **Mariola Grzywacka**

Skład i łamanie: **Ewa Szelatyńska, ScanSystem.pl**

Recenzent: **dr hab. inż. Alicja Mazur, profesor Politechniki Wrocławskiej,**
Katedra Cybernetyki i Robotyki

Książka została dofinansowana przez Politechnikę Łódzką, Instytut Automatyki

ISBN 978-83-01-19697-4

Wydanie I

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl, reklama@pwn.pl
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

Spis treści

Przedmowa

Podstawowym celem automatyki jest oddziaływanie na otaczające nas procesy w celu zapewnienia ich pożądanego przebiegu. Te procesy są przeważnie nieliniowe, zazwyczaj podlegają wpływowi nieprzewidywalnych czynników zewnętrznych, a ich charakterystyki nigdy nie są dokładnie znane. W klasycznej automatyce ze względu na trudności, jakie nastręcza analiza systemów nieliniowych, często projektuje się układy sterowania z wykorzystaniem uproszczonego, liniowego opisu analizowanych procesów. Takie podejście w naturalny sposób prowadzi do przybliżonych wyników, które mogą być dopuszczalne i wartościowe w konkretnych przypadkach, ale zawsze pozostawiają wątpliwości, czy prowadzą do najlepszego możliwego przebiegu danego procesu i czy nieunikniony margines błędu nie spowoduje całkiem innego działania układu niż przewidywany przy zastosowaniu liniowej analizy. Dlatego celowa jest dokładna analiza otaczających nas procesów przy zastosowaniu nieliniowych metod teorii sterowania. Właśnie temu zagadnieniu jest poświęcona książka zatytułowana „Projektowanie nieliniowych układów sterowania". W jej pierwszej części są opisane metody badania stabilności nieliniowych układów dynamicznych, zarówno układów stacjonarnych, jak i niestacjonarnych. Omawiane w części pierwszej zagadnienia można wprawdzie znaleźć w polskiej literaturze przedmiotu, ale są one rozsiane po różnych publikacjach i dlatego ich uporządkowanie i przedstawienie w zwartej postaci wydaje się celowe, tym bardziej, że stanowią one element niezbędny do czytania drugiej i trzeciej części książki. Część druga zawiera systematyczny wykład najważniejszych matematycznych metod projektowania nieliniowych układów sterowania obiektami dynamicznymi. Omówiono w niej wiele ważnych zagadnień z tego obszaru, jak na przykład pojęcie sterującej funkcji Lapunowa, kwestię adaptacyjnego nadążania za modelem i wreszcie różne warianty tzw. backsteppingu, czy też jak piszą Autorzy – algorytmu „kroków wstecz". Warto zauważyć, że Autorzy rozpoczynają od przedstawienia najprostszej wersji tego algorytmu, a następnie stopniowo przechodzą do jego bardziej skomplikowanych wariantów. Takie podejście, zainspirowane wieloletnim doświadczeniem dydaktycznym Autorów w zakresie teorii sterowania, a w szczególności teorii sterowania nieliniowego, z pewnością ułatwi czytelnikom studiowanie książki i analizę zawartych w niej wielu nietrywialnych zagadnień. Trzecia, ostatnia część książki jest poświęcona kilku, bardzo istotnym z praktycznego punktu widzenia, zagadnieniom projektowania nieliniowych układów regulacji. Należą do nich tak ważne kwestie jak nieuniknione w każdej realnej sytuacji ograniczenia sygnału sterującego, zmiennych stanu i sygnału wyjściowego. Całość uzupełniają trzy dodatki ułatwiające mniej zaawansowanym matematycznie czytelnikom śledzenie prezentowanych zagadnień.

Książka ma charakter poważnego podręcznika akademickiego dotyczącego analizy i projektowania nieliniowych systemów sterowania, ma także istotne walory monograficzne. Z pewnością taka publikacja jest od dawna oczekiwana i bardzo potrzebna na polskim rynku wydawniczym, na którym jest obecnie kilka bardzo dobrych i wyczerpujących publikacji na temat sterowania liniowego, ale brakuje zwartej prezentacji metod nieliniowych. Adresatami książki „Projektowanie nieliniowych układów sterowania" są studenci studiów drugiego stopnia kierunku automatyka i robotyka oraz kierunków pokrewnych, dyplomanci oraz doktoranci zajmujący się zagadnieniami sterowania nieliniowego, a także inżynierowie, którzy coraz częściej dostrzegają szansę uzyskania przewagi konkurencyjnej swoich firm i zespołów, dzięki zastosowaniu zaawansowanych – i zwykle uważanych za trudne – metod sterowania nieliniowego. Książka może być także interesująca dla słuchaczy studiów doktoranckich i badaczy związanych z ekonomią, w której zaniedbywane wcześniej modele nieliniowe w ostatniej dekadzie zaczęły cieszyć się rosnącą popularnością.

Andrzej Bartoszewicz

Łódź, 5 czerwca 2017 r.

Wprowadzenie

Przedstawiamy wybrane metody projektowania układów sterowania z obiektami opisanymi nieliniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi o nieznanych parametrach.

Napisaliśmy tę książkę, żeby pokazać, że skuteczne projektowanie nieliniowych, adaptacyjnych układów sterowania jest możliwe – konieczne do niego techniki i sposoby mogą być opanowane przez studentów automatyki i robotyki, a przez inżynierów automatyków powinny być włączone do podstawowego zasobu metod projektowania.

Podjęte tu tematy lokują się w głównym nurcie rozwoju teorii sterowania, w obszarze nieliniowych, adaptacyjnych układów sterowania. Świat wokół nas jest nieliniowy. Większość obiektów sterowania powinna być opisywana za pomocą modeli nieliniowych. To, że powszechnie są stosowane regulatory otrzymane w wyniku przybliżenia obiektu modelem liniowym, nie wynika z lepszej jakości takiego sterowania, a jedynie z ograniczeń teorii i możliwości implementacji sterowania nieliniowego. Znaczenie sterowania nieliniowego było podkreślane nawet w okresie rozwoju klasycznej teorii sterowania, bazującej na modelach liniowych. W 1955 roku, w jednym z bardziej popularnych podręczników pisano:

„(…), *the designer must be acquainted with the basic techniques available for considering nonlinear systems. He must be able to analyze the effects of unwanted non-linearities in the system and to synthesize nonlinearities into the system to improve dynamic performance”*[1].

Sterowanie adaptacyjne jest wręcz uznawane za kierunek przyszłego rozwoju automatyki. Profesor K.J.Aström, wielki autorytet w zakresie strojenia i projektowania liniowych regulatorów, w 2014 roku pisał:

„*In the future, adaptive control may be an important component of emerging autonomous systems*”[2].

W nieliniowym, zmiennym świecie adaptacyjne sterowanie nieliniowe prowadzi do lepszych wyników niż sterownie liniowe. Skuteczne rozszerzenie możliwości stosowania nieliniowych, adaptacyjnych metod sterowania ma wpływ nie tylko na poprawę jakości sterowania, ale też na mniejsze zużycie energii w sterowanych układach i procesach. Dotyczy to wielu obszarów zastosowań. Robotyka, sterowanie ruchem i napędami, energetyka, automatyka procesowa to tylko niektóre z możliwości. Control Systems Society IEEE prowadzi listę[3] najbardziej znaczących dla rozwoju współczesnej techniki osiągnięć automatyki. Większość z umieszczonych tam opisów dotyczy zastosowań sterowania nieliniowego i adaptacyjnego.

We współczesnej teorii sterowania nieliniowego można wyróżnić kilka głównych nurtów. W książce skoncentrowaliśmy się na takich sposobach sterowania, w których wyko-

---

[1] „(…), projektant musi opanować podstawowe techniki dotyczące systemów nieliniowych. Musi być zdolnym do analizy efektów niechcianych nieliniowości na układ i do syntezy nieliniowych praw sterowania poprawiających jakość pracy systemu”. Truxal J., *Automatic Feedback Control System Synthesis*, McGraw-Hill, New York, NY, (1955).

[2] W przyszłości sterowanie adaptacyjne może być ważnym składnikiem kształtujących się systemów autonomicznych. Astrom K.J., Kumar P.R., *Control: a perspective*, Automatica, vol. 50, no. 1, pp. 3–43, (2014)

[3] http://ieeecss.org/general/IoCT2-report (dostęp 03.09.2017).

rzystuje się bezpośrednią metodę Lapunowa. Teoria stabilności Lapunowa jest właściwie elementem koniecznym każdej metody projektowania nieliniowego układu sterowania. Podstawową cechą każdego praktycznego układu sterowania jest jego stabilność. W przypadku nieliniowego obiektu lub regulatora to właśnie teoria Lapunowa służy do badania stabilności już zaprojektowanego układu sterowania i upewnienia się, że będzie on działał poprawnie i bezpiecznie. W podejściu przedstawionym w tej książce sytuacja zostaje odwrócona: to regulator, prawa sterowania i adaptacji są konstruowane tak, by spełnić warunki stabilności wynikające z bezpośredniej metody Lapunowa.

W rozdziałach pierwszym, drugim i trzecim przedstawiliśmy w zwarty sposób wszystkie podstawowe definicje i twierdzenia składające się na podstawy teorii stabilności Lapunowa i bezpośredniej metody badania stabilności układów nieliniowych. Zebraliśmy wyniki pochodzące z oryginalnych prac Lapunowa i rezultaty uzyskane w ostatnich latach, bowiem teoria stabilności jest ciągle rozwijana. Wraz z podanymi twierdzeniami przedstawiliśmy dowody i interpretacje na przykładach, tak by można było zrozumieć całość bez sięgania do innych źródeł bibliograficznych.

Koncepcję projektowania sterowania z wykorzystaniem bezpośredniej metody Lapunowa przedstawiliśmy w rozdziale czwartym. Tam też zdefiniowaliśmy problem sterowania odpornego i adaptacyjnego. Pokazaliśmy, dlaczego w przypadku sterowania w obecności zakłóceń tak ważne są tzw. warunki dopasowania i dlaczego rekursywne metody projektowania pozwalają na ominięcie ograniczeń wnoszonych przez te warunki.

W rozdziale piątym opisaliśmy sposób projektowania układów adaptacyjnych nadążających za modelem odniesienia, także w przypadku gdy i model i obiekt sterowania są nieliniowe. Głównym wyróżnikiem wszystkich prezentowanych w tej książce metod sterowania jest możliwość ich skutecznego stosowania w rzeczywistych warunkach. Dlatego dużo miejsca poświęciliśmy na omówienie odpornych praw adaptacji, które sprawdzą się w obecności zewnętrznych zakłóceń i rozbieżności między modelem a układem rzeczywistym.

W rozdziale szóstym przedstawiliśmy algorytm „kroków wstecz”, czyli rekursywną metodę projektowania sterowania wykorzystującą funkcje Lapunowa tworzone dla kolejnych, kaskadowo połączonych podukładów. W zasadzie ten sposób projektowania polega na kompensowaniu nieliniowości obiektu przez odpowiednio dobrane sterowanie. Jednak nie każda nieliniowość działa w sposób destabilizujący układ. Sposobom rozróżnienia takich „korzystnych nieliniowości” i wykorzystania ich w układzie sterowania poświęcono dużą część tego rozdziału.

Adaptacyjną wersję algorytmu „kroków wstecz” omówiliśmy w rozdziale siódmym, a rozdziały ósmy i dziewiąty poświęciliśmy jego modyfikacjom zabezpieczającym przed jednym z większych problemów w praktycznej implementacji – tzw. eksplozją złożoności algorytmu. Podobnie jak w rozdziale piątym powraca tu problem odporności układu adaptacyjnego na zewnętrzne zakłócenia i nieuwzględnioną w modelu dynamikę obiektu. W każdym z wariantów procedury „kroków wstecz” umożliwiono stosowanie odpornych praw adaptacji i rozważono inne sposoby „uodpornienia” układu adaptacyjnego.

W kolejnej części odnieśliśmy się do ograniczeń, jakie często występują w rzeczywistych układach sterowania, a które nie były uwzględniane w przedstawionych dotychczas metodach projektowania. Omówiliśmy wykorzystanie algorytmu „kroków wstecz” w przypadku ograniczonego sygnału sterującego (rozdział dziesiąty) i w przypadku ograniczeń nałożonych na wyjście lub zmienne stanu układu (rozdział dwunasty). W rozdziale jedenastym przedstawiliśmy szereg praktycznych kwestii związanych z założeniami o nieznanych parametrach występujących w modelu. Wyjaśniliśmy, jak postępować, jeśli te parametry nie są stałe i jeśli model nie jest „liniowo sparametryzowany”. Podkreśliliśmy ważną z praktycznego punktu widzenia kwestię liczby adaptowanych parametrów. Pokazaliśmy też, jak łączyć różne techniki projektowania, by dopasować się do specyfiki problemu i wykorzystać silne strony procedury „kroków wstecz” – jej przejrzystość i logiczny porządek w generalnej linii postępowania oraz elastyczność w szczegółach.

Wybór tych, a nie innych, metod projektowania był motywowany naszym przekonaniem o ich skuteczności i możliwości praktycznego stosowania. Zaletą prezentowanych procedur jest ich rekursywny, „modułowy” charakter. Zasady postępowania tworzą czytelny schemat, który można łatwo opanować i z powodzeniem stosować w różnych problemach. Chcieliśmy uzbroić czytelnika w podstawowy arsenał precyzyjnie przedstawionych procedur projektowania, które jednak można twórczo modyfikować i dostosowywać do specyfiki rozwiązywanego problemu.

Chcieliśmy, żeby tekst był czytelny bez uciążliwego odwoływania się do cytowanych źródeł, dlatego konieczne dodatkowe informacje, definicje i twierdzenia umieściliśmy w dodatkach. Wszystkie problemy i metody projektowania są zilustrowane blisko 30 przykładami. Wybraliśmy układy dość proste i zobrazowaliśmy efekty projektowania wynikami symulacji cyfrowych, tak by każdy zainteresowany mógł powtórzyć opisane eksperymenty. Możemy też zapewnić, że sprawdziliśmy możliwość uruchomienia układów sterowania zaprojektowanych opisanymi metodami w rzeczywistych układach wyposażonych w sterowniki w postaci procesorów sygnałowych.

Dla wielu przedstawionych tu metod projektowania jest to pierwszy opis w języku polskim. Mieliśmy więc obowiązek zaproponowania polskich odpowiedników dla pojęć uznanych i funkcjonujących w języku angielskim. Mamy nadzieję, że są na tyle trafne, by utrwalić się w polskiej terminologii automatyki. Terminy polskie i angielskie zestawiliśmy w słowniku na końcu książki.

Przedstawione rozważania mieszczą się w tym obszarze metod matematycznego opisu rzeczywistości, który obejmuje teoria sterowania. Wyróżnikiem tej książki jest zorientowanie na metody projektowania nieliniowych układów sterowania, które mogą być skutecznie używane w praktycznych zastosowaniach. Nie sposób nie odwołać się tutaj do sławnego cytatu „Nie ma nic tak praktycznego jak dobra teoria”[4].

Naszym celem było wypełnienie pewnej luki w istniejącej, polskiej literaturze akademickiej dotyczącej automatyki i teorii sterowania. Książka jest adresowana do szerokiego grona odbiorców. Skorzystają z niej studenci i nauczyciele akademiccy na kierunkach automatyka i robotyka oraz mechatronika, doktoranci i pracownicy nauki zajmujący się nieliniową teorią sterowania, a także jej zastosowaniami we wszelkich, bardzo licznych obszarach. Zapraszamy do lektury i twórczego stosowania przedstawionych tu procedur projektowania nieliniowych, adaptacyjnych układów sterowania.

[4] Lewin, K. (1951). *Problems of research in social psychology*. In D. Cartwright (Ed.), *Field theory in social science: Selected theoretical papers* (pp. 155-169). New York: Harper & Row. (p. 169), choć ten cytat jest także przypisywany Jamesowi Clerkowi Maxwellowi, Ludwigowi Boltzmannowi, a nawet Leonidowi Breżniewowi.

Część I

STABILNOŚĆ NIELINIOWYCH UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Teoria stabilności nieliniowych układów dynamicznych wchodzi w zakres podstawowego kursu teorii sterowania dla studentów automatyki i robotyki oraz mechatroniki. Zazwyczaj omawia się podstawowe definicje stabilności i twierdzenia najważniejsze dla bezpośredniej metody Lapunowa, służące do badania stabilności punktów równowagi układów stacjonarnych i autonomicznych. Tymczasem, w ostatnich dziesięcioleciach teoria stabilności układów nieliniowych była ciągle rozwijana i sukcesywnie pojawiały się twierdzenia rozszerzające jej zastosowania. Rozdziały w tej części książki mają charakter encyklopedycznego przeglądu aktualnego stanu wiedzy w tym zakresie. Podano najpierw definicje precyzujące różne pojęcia stabilności (rozdział pierwszy), a następnie twierdzenia, które można zastosować przy badaniu stabilności układów stacjonarnych (rozdział drugi) i niestacjonarnych (rozdział trzeci). Przedstawione pojęcia zilustrowano kilkoma przykładami. Dowody twierdzeń podano jedynie wtedy, gdy ułatwiają one zrozumienie istoty zjawisk. Sporo miejsca poświęcono ograniczoności i ostatecznej ograniczoności trajektorii, które są bardzo „praktycznym” rodzajem stabilności układów nieliniowych.

Rozdział 1

NIELINIOWE UKŁADY DYNAMICZNE, PUNKTY RÓWNOWAGI I STABILNOŚĆ

Pojęcie stabilności ma kluczowe znaczenie w teorii sterowania i w praktyce projektowania układów regulacji. W języku potocznym „stabilny” jest bez wątpienia przymiotnikiem pozytywnym. „Stabilne konstrukcje” uważamy za bezpieczne, lepiej czujemy się w towarzystwie osób „stabilnych emocjonalnie”, cenimy „stabilne uczucia”. Wolimy też, by systemy ekonomiczne, biologiczne i społeczne, w których żyjemy, były stabilne, czyli zgodnie z definicją Słownika Języka Polskiego „łatwo powracające do równowagi po wcześniejszym jej zakłóceniu”.

O ile można się zgodzić, że układy dynamiczne, które są tworami natury, zwykle charakteryzują się stabilnością i tylko wyjątkowo przejawiają zachowania niestabilne, równoznaczne katastrofie, o tyle w przypadku układów skonstruowanych przez człowieka utrata stabilności jest całkiem możliwa. Wiadomo, że nawet liniowe sprzężenie zwrotne wokół liniowego i stabilnego obiektu może prowadzić do utraty stabilności układu zamkniętego i trzeba specjalnie zadbać o to, by taka sytuacja nie wystąpiła. Stabilność jest podstawowym wymaganiem stawianym układom sterowania i warunkiem bezpieczeństwa ich pracy.

W odniesieniu do układów dynamicznych stabilność można definiować i opisywać na wiele sposobów. Możliwe jest definiowanie stabilności na podstawie relacji wejście-wyjście układu, to jest jako cechy polegającej na tym, że wyjście układu zachowuje się „poprawnie” w określonym sensie, jeśli tylko wejście zachowuje się „poprawnie”. W ujęciu przyjętym w tej książce stabilność jest definiowana na podstawie analizy asymptotycznego (czyli dla czasu dążącego do nieskończoności) zachowania trajektorii wektora stanu układu, w relacji do trajektorii obowiązujących w stanie ustalonym – to jest punktów równowagi lub cykli granicznych. W tym rozdziale są zebrane definicje stabilności rozumianej w różny sposób.

Przedmiotem rozważań są nieliniowe układy dynamiczne, które mogą być opisane skończonym układem równań różniczkowych zwyczajnych, nazywanym równaniem stanu

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{1.1}$$

w którym t oznacza czas,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

jest n-wymiarowym wektorem zmiennych stanu, $\dot{x}$ pochodną zmiennych stanu x względem czasu, a

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

p-wymiarowym wektorem sygnałów wejściowych (sterowań) oraz

$$f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Jeżeli nie wszystkie zmienne stanu są dostępne, to przyjmiemy, że wyjście układu jest opisane równaniem algebraicznym

$$y = h(t, x, u), \tag{1.5}$$

w którym

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

jest m-wymiarowym wektorem wyjść oraz

$$h(t, x, u) = \begin{bmatrix} h_1(t, x, u) \\ h_2(t, x, u) \\ \vdots \\ h_m(t, x, u) \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

Rozważane są układy dynamiczne, w których funkcja $f(t, x, u)$ spełnia założenia odpowiedniego twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego (twierdzenie D2.2 z dodatku D2), to znaczy, że przy określonym warunku początkowym $x(t_0) = x_0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $x(t)$ równania (1.1) określone dla $t \geq t_0$, nazywane trajektorią układu. By podkreślić zależność rozwiązania równania stanu od warunków początkowych, będzie stosowane oznaczenie $x(t; t_0, x_0)$ dla trajektorii spełniającej warunek $x(t_0) = x_0$.

Jeżeli w opisie modelowanego układu nie wyróżniono w jawny sposób sygnałów wejściowych, to jest

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.8}$$

to taki układ jest nazywany swobodnym. Postać modelu (1.8) nie musi oznaczać, że układ jest pozbawiony sterowania. Model (1.8) jest odpowiedni w sytuacji, gdy określone sterowanie $u = u(t)$ zostało uwzględnione w zależności funkcji f od czasu, lub kiedy sterowanie w postaci sprzężenia od zmiennych stanu $u = u(x)$ zostało uwzględnione w zależności funkcji f od zmiennych stanu x, lub w bardziej ogólnym przypadku łączącym dwa poprzednie, to jest gdy określono sterowanie $u = u(t, x)$. Jeśli w równaniu (1.8) nie występuje jawna zależność funkcji f od czasu, to jest

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.9}$$

to układ jest nazywany stacjonarnym. Parametry układu stacjonarnego pozostają stałe w funkcji czasu, a jego zachowanie nie zależy od chwili początkowej t_0.

Definicja 1.1. Punktem równowagi układu (1.8) nazywamy każdy stan x_e, dla którego $f(t, x_e) = 0$ dla każdego $t > t_0$.

Stała trajektoria $x(t) = x_e$ jest więc rozwiązaniem równania (1.8) z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_e$. Gdy układ jest stacjonarny (obowiązuje model (1.9)), wówczas punkty równowagi są rzeczywistymi pierwiastkami równania algebraicznego $f(x) = 0$. Punkt $x = 0$ nie musi być punktem równowagi układu (1.9). Jeżeli jednak $x_e \neq 0$ jest punktem równowagi układu (1.9), to zamiana zmiennych określona równaniem $z = x - x_e$ prowadzi do układu

$$\dot{z} = f(z + x_e) = g(z), \tag{1.10}$$

w którym $z = 0$ jest punktem równowagi. Tak więc założenie, że punkt równowagi znajduje się w początku układu współrzędnych nie zmniejsza ogólności rozważań, o ile badamy właściwości jednego, konkretnego punktu równowagi.

Definicja 1.2. Punkt równowagi x_e jest nazywany izolowanym punktem równowagi, jeśli istnieje jego otoczenie niezawierające innych punktów równowagi.

O ile w stacjonarnym układzie liniowym istnieje pojedynczy izolowany punkt równowagi (albo kontinuum nieizolowanych punktów równowagi), o tyle w układzie nieliniowym może występować wiele izolowanych punktów równowagi.

Oprócz punktów równowagi układu nieliniowego można wyróżnić okresowe trajektorie opisujące jego zachowanie w stanie ustalonym, czyli dla $t \to \infty$.

Definicja 1.3. Jeżeli istnieje zmienne w czasie rozwiązanie równania (1.8) spełniające warunek

$$x(t + T) = x(t) \tag{1.11}$$

dla pewnego $T > 0$ i każdego $t > t_0$, to nazywamy je cyklem granicznym.

Trajektoria w przestrzeni stanów odpowiadająca cyklowi granicznemu ma postać zamkniętej krzywej.

Dla układów liniowych „stabilność” jest rozumiana jako właściwość całego układu polegająca na zanikaniu składowej przejściowej odpowiedzi układu. W przypadku układów nieliniowych właściwość nazywana stabilnością dotyczy poszczególnych trajektorii układu, a w szczególności służy do opisu zachowania trajektorii układu nieliniowego w otoczeniu punktów równowagi. Zachowanie to może być różne w poszczególnych punktach równowagi tego samego układu. Inaczej niż w przypadku układów liniowych, dla których wszystkie definicje stabilności są równoważne, dla układów nieliniowych można sformułować wiele istotnie różniących się definicji stabilności.

Definicja 1.4. Punkt równowagi x_e układu (1.8) nazywamy stabilnym w sensie Lapunowa, jeśli dla dowolnych $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta_\varepsilon > 0$ (zależna być może od t_0, ε), taka że

$$\|x_e - x_0\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon. \tag{1.12}$$

Definicja 1.5. Punkt równowagi x_e układu (1.8) nazywamy niestabilnym, jeśli nie jest stabilny w sensie definicji 1.4.

Definicja 1.6. Punkt równowagi x_e układu (1.8) nazywamy jednostajnie stabilnym, jeżeli $\delta_\varepsilon > 0$ w definicji 1.4 nie zależy od t_0.

Definicja 1.7. Punkt równowagi x_e układu (1.8) nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeśli jest stabilny w sensie definicji 1.4, a ponadto istnieje $\delta > 0$ (zależna być może od t_0), taka że

$$\|x_e - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| = 0. \tag{1.13}$$

Definicja 1.8. Punkt równowagi x_e układu (1.8) nazywamy jednostajnie stabilnym asymptotycznie, jeżeli jest jednostajnie stabilny, a ponadto istnieje $\delta > 0$, niezależna od t_0 i taka że dla wszystkich $\|x_e - x_0\| < \delta$ trajektoria $x(t; t_0, x_0)$ zbiega do x_e jednostajnie względem t_0, to znaczy dla dowolnego $t_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ istnieje $\tau(\varepsilon) > 0$, takie że

$$\|x_e - x_0\| < \delta \Rightarrow \forall_{t > t_0 + \tau(\varepsilon)} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| < \varepsilon. \tag{1.14}$$

Punkt równowagi jest globalnie jednostajnie asymptotycznie stabilny, jeśli warunki tej definicji są spełnione dla dowolnych par liczb (ε, δ).

Definicja 1.9. Punkt równowagi x_e układu (1.8) nazywamy wykładniczo stabilnym, jeżeli istnieje liczba $\alpha > 0$, taka że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ (zależna być może od ε), taka że dla dowolnego $t \geq t_0$

$$\|x_e - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| \leq \varepsilon e^{-\alpha(t-t_0)}. \tag{1.15}$$

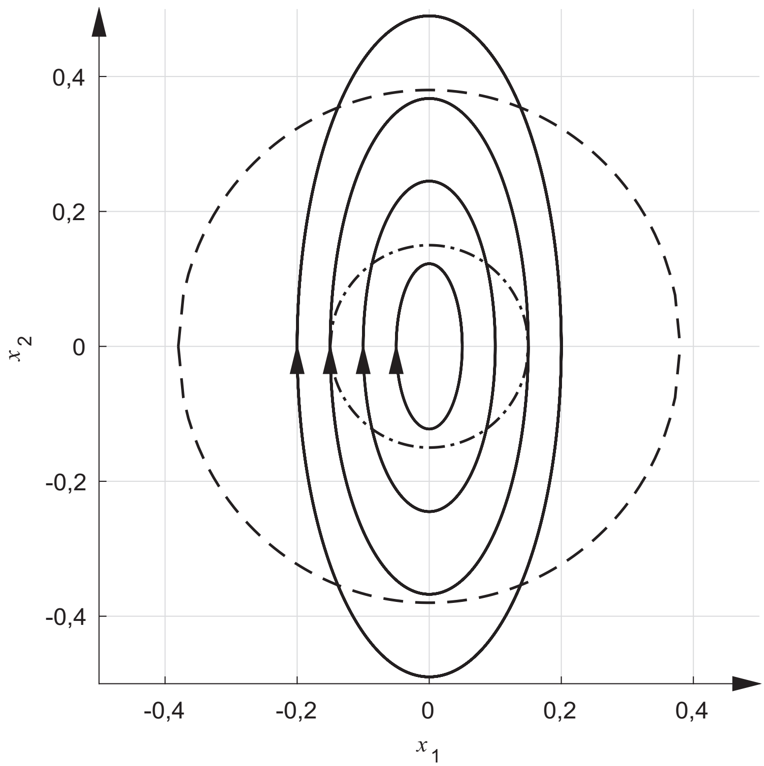
Z definicji 1.9 i 1.7 wynika bezpośrednio, że wykładniczo stabilny punkt równowagi jest asymptotycznie stabilny.

Przykład 1.1

Weźmy pod uwagę układ nieliniowy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right) \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right) - bx_2 \end{aligned} \tag{1.16}$$

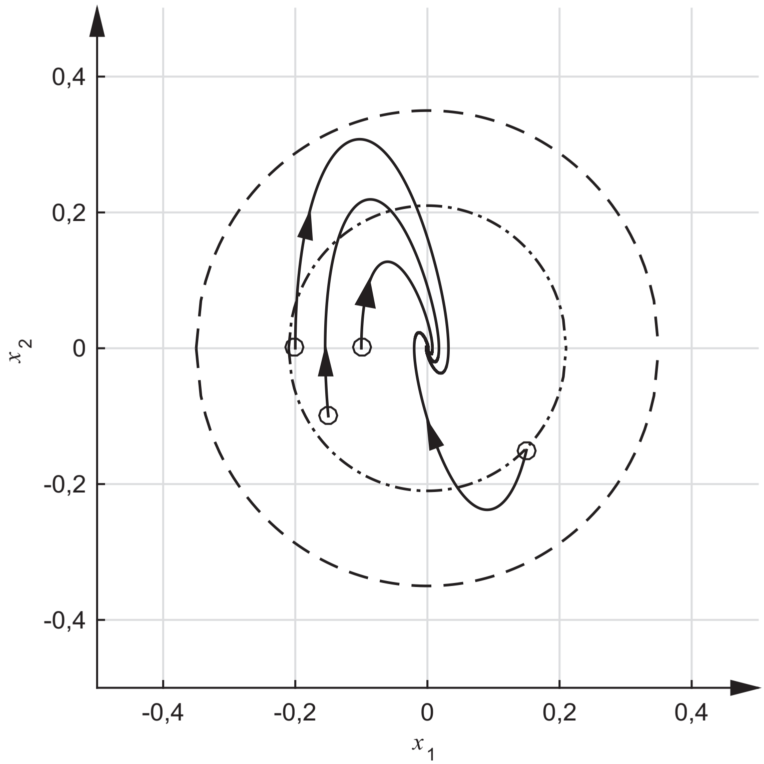
Na rysunku 1.1 pokazano trajektorie układu dla $b = 0$.



Rys. 1.1. Graficzna ilustracja definicji 1.7: linia ciągła – trajektorie układu, kropka-kreska – okrąg o promieniu δ, kreskowa – okrąg o promieniu ε

W takim przypadku trajektorie układu tworzą krzywe zamknięte – elipsy, których półosie zależą od warunków początkowych. Dla dowolnie małego okręgu o promieniu ε można wybrać okrąg o promieniu δ, taki że trajektorie układu (elipsy) zaczynające się w tym okręgu nie wyjdą poza okrąg o promieniu ε. Na rysunku 1.1 linią kreskową zaznaczono przykładowy okrąg o promieniu ε, a linią kropka-kreska odpowiadający mu okrąg o promieniu δ. Zgodnie z definicją 1.7 punkt równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ jest stabilny w sensie Lapunowa.

Gdy $b > 0$, wówczas otrzymujemy trajektorie jak na rysunku 1.2. Dla dowolnego okręgu o promieniu ε (linia kreskowa) można wskazać okrąg o promieniu δ (linia kropka-kreska), taki że każda zaczynająca się w nim trajektoria nie opuści okręgu o promieniu ε, a ponadto dąży do punktu równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, gdy t dąży do nieskończoności. Punkt równowagi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ jest więc asymptotycznie stabilny.



Rys. 1.2. Graficzna ilustracja definicji 1.8: linia ciągła – trajektorie układu, kropka-kreska – okrąg o promieniu δ, kreskowa – okrąg o promieniu ε, o – wartości początkowe

Definicja 1.10. Zbiór wszystkich takich punktów x_0 w przestrzeni stanów, dla których $\lim_{t\to\infty} \|x_e - x(t; t_0, x_0)\| = 0$ dla pewnego $t_0 \geq 0$ nazywamy zbiorem przyciągania punktu równowagi x_e.

Definicja 1.11. Jeżeli punkt równowagi x_e układu (1.8) jest asymptotycznie stabilny i jego zbiór przyciągania jest całą przestrzenią stanów, to punkt równowagi nazywamy globalnie asymptotycznie stabilnym.

W przypadku układów stacjonarnych, opisanych równaniem (1.9), znika zależność trajektorii od chwili początkowej t_0, więc stabilny punkt równowagi układu stacjonarnego jest jednostajnie stabilny, a asymptotycznie stabilny jest jednostajnie asymptotycznie stabilny.

Stabilność w sensie Lapunowa zgodnie z definicją 1.4 jest dość słabym wymaganiem wobec zachowania układu dynamicznego – nie pociąga nawet zbieżności trajektorii do punktu równowagi, a tylko ogranicza obszar wokół punktu równowagi, w którym trajektoria pozostaje. Zgodnie z tą definicją małe zaburzenie warunku początkowego daje małą zmianę rozwiązania. Stabilność asymptotyczna oznacza, że wokół punktu równowagi istnieje obszar przyciągania – trajektoria startująca w tym obszarze dąży do punktu równowagi. Stabilność asymptotyczna nie mówi nic o tym, jak szybko układ zbiega do punktu równowagi ani nie oznacza, że zbieżność jest „monotoniczna” – układ może początkowo oddalić się od punktu równowagi, by ostatecznie do niego powrócić. Takie trajektorie pokazano na rys. 1.2. Informacja o szybkości zbieżności wynika natomiast z definicji stabilności wykładniczej – decyduje o niej parametr α we wzorze (1.15).

Dla stacjonarnych układów liniowych koniecznym i dostatecznym warunkiem stabilności asymptotycznej jest położenie wszystkich wartości własnych macierzy stanu w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej.

O tym, że wymaganie stabilności umieszczone w definicji stabilności asymptotycznej jest konieczne przekonuje podany w [Hahn, 1967] przykład układu, w którym punkt równowagi ma obszar przyciągania, ale nie jest stabilny.

Przykład 1.2

Rozważmy system nieliniowy drugiego rzędu opisany równaniami

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2\right)}\\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)\left(1 + \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2\right)}\end{aligned} \tag{1.17}$$

System (1.17) ma jeden punkt równowagi $(x_{e1}, x_{e2}) = (0, 0)$. Na rysunku 1.3 pokazano kilka wybranych trajektorii stanu rozważanego układu.

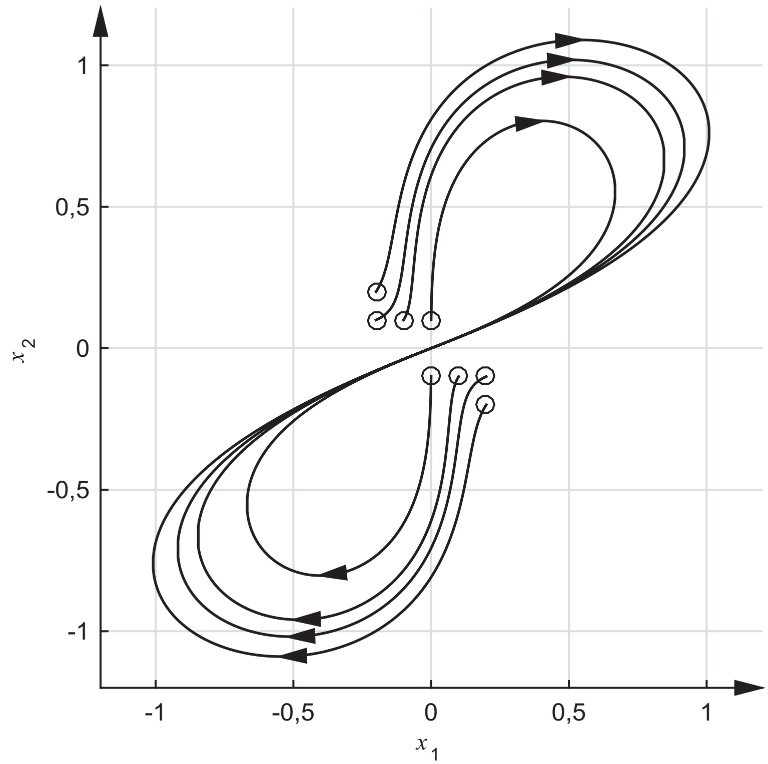
Jak pokazano w [Hahn, 1967], obszarem przyciągania jest cała płaszczyzna $\mathbb{R}^2$. Mimo to nie są spełnione warunki definicji 1.4 i punkt równowagi nie jest stabilny w sensie Lapunowa. Zostanie pokazana taka liczba $\varepsilon > 0$, dla której nie istnieje δ dająca prawdziwość implikacji (1.12) – trajektoria rozpoczynająca się dowolnie blisko punktu równowagi opuszcza jego otoczenie o promieniu ε.

Weźmy pod uwagę domknięty trójkąt T ograniczony przez dodatnią półoś x_2, prostą $x_2 = 3x_1$ oraz prostą $x_2 = a < \frac{1}{\sqrt{27}}$ (rys. 1.4). Wewnątrz tego trójkąta i na jego krawędziach $\dot{x}_2 > 0$ i $\dot{x}_1 > 0$, a na odcinku OP jest spełniona zależność

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1)}{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5} = \frac{9}{2 + 27x_2^2} > 3. \tag{1.18}$$

Wynika stąd, że jeżeli trajektoria układu znajdzie się w trójkącie T, to dalej trajektoria musi przebiegać tak, że obie zmienne stanu rosną, a gdyby trajektoria dotarła do odcinka OP, to z uwagi na (1.18) zostałaby skierowana do wnętrza trójkąta T. Tak więc każda trajektoria z warunkiem początkowym wewnątrz trójkąta OPQ musi przeciąć odcinek QP.

Niech $\varepsilon = a$. Rozważmy trajektorię z warunkiem początkowym $x_1 = 0$, $x_2 = \delta < a$. Musi ona przeciąć odcinek QP, musi więc opuścić otoczenie punktu równowagi o promieniu $\varepsilon = a$ niezależnie od tego, jak mała jest odległość δ warunku początkowego od punktu (0,0), czyli układ jest niestabilny. Na rysunku 1.4 pokazano początkowy i końcowy fragment trajektorii dla warunku początkowego $\left(0; 10^{-10}\right)$.



Rys. 1.3. Trajektorie układu (1.17), o – warunki początkowe

Stabilność w sensie Lapunowa i stabilność asymptotyczna zakładają istnienie punktu równowagi. W wielu układach obecność zmieniających się zakłóceń, szumów pomiarowych itp. wyklucza istnienie stałego punktu równowagi. W takim przypadku przydatne są definicje pozwalające na ocenę globalnego zachowania trajektorii układu.

Definicja 1.12. Trajektoria $x(t;t_0,x_0)$ układu (1.8) jest ograniczona, jeżeli istnieje stała $\beta > 0$, taka że

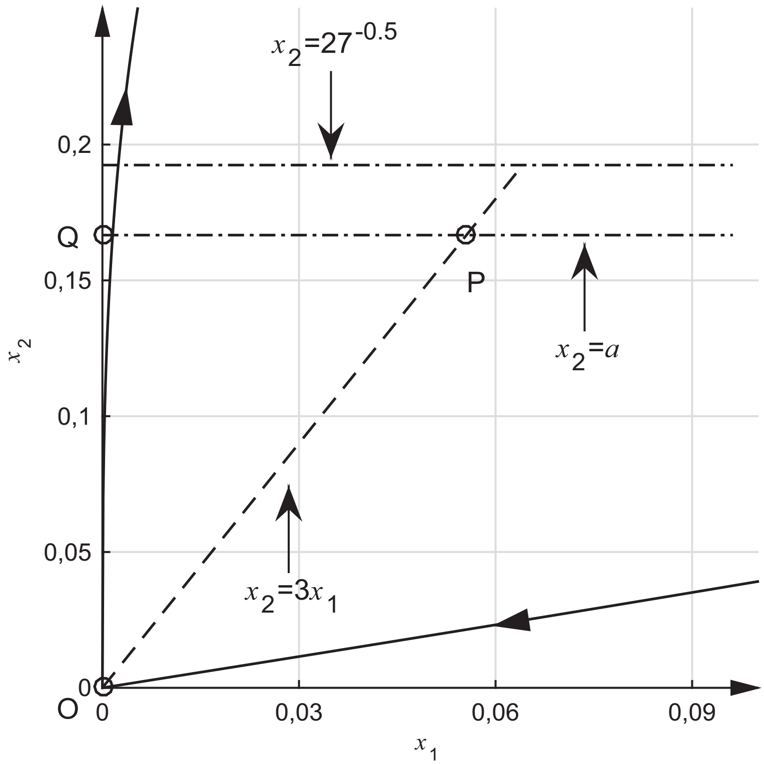
$$\forall_{t\geq t_0} \|x(t;t_0,x_0)\| < \beta. \tag{1.19}$$

Stała β w definicji 1.12 jest związana z wybraną trajektorią. Właściwość określoną w definicji 1.12 można wzmocnić żądając, żeby ta sama stała była odpowiednia dla wielu trajektorii.

Definicja 1.13. Trajektorie $x(t;t_0,x_0)$ układu (1.8) są jednostajnie ograniczone, jeżeli dla dowolnego, ograniczonego $\alpha > 0$ i $t_0 \geq 0$ istnieje stała $\beta > 0$ (zależna od α, ale niezależna od t_0), taka że

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall_{t\geq t_0} \|x(t;t_0,x_0)\| < \beta. \tag{1.20}$$

Definicja 1.14. Trajektorie $x(t;t_0,x_0)$ układu (1.8) są ostatecznie jednostajnie ograniczone z ograniczeniem $B > 0$, jeżeli dla dowolnego, ograniczonego $\alpha > 0$ i $t_0 \geq 0$ istnieje



Rys. 1.4. Trójkąt OPQ i trajektorie układu (1.17) (linia ciągła)

$\tau > 0$ (zależne od α i B), takie że

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall_{t \geq t_0 + \tau(\alpha, B)} \|x(t; t_0, x_0)\| < B. \tag{1.21}$$

Jeśli stała α może być dowolnie duża, to trajektorie układu są globalnie ostatecznie jednostajnie ograniczone.

Przykład 1.3

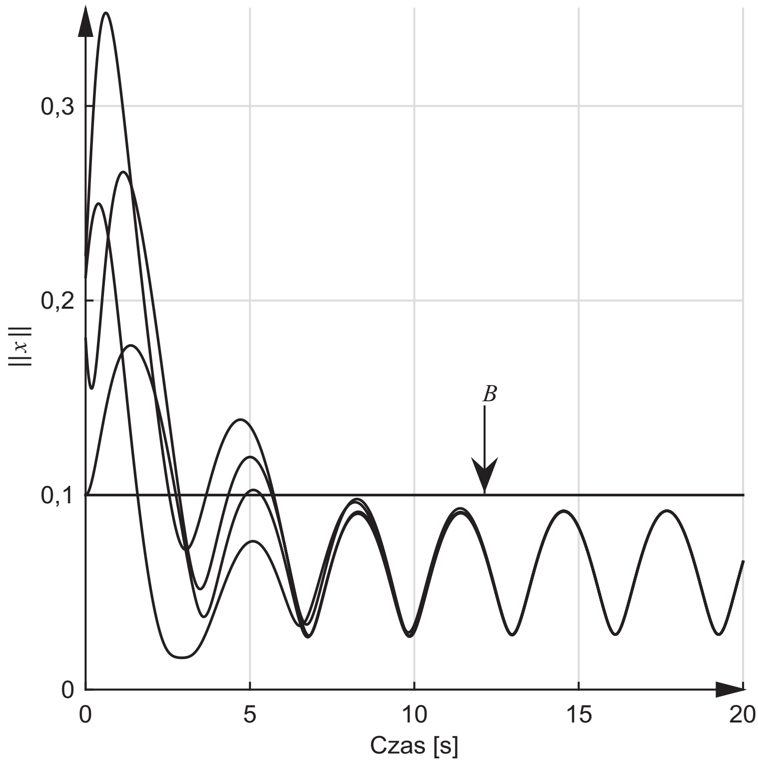
Weźmy pod uwagę układ nieliniowy (1.16) dla $b > 0$, poddany zewnętrznemu sygnałowi zakłócającemu $d(t) = 0{,}1 \sin(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right), \\ \dot{x}_2 &= -6x_1 \left(10x_1^2 + x_2^2 + 0{,}3\right) - bx_2 + 0{,}1 \sin(t). \end{aligned} \tag{1.22}$$

Na rysunku 1.5 przedstawiono przebiegi normy wektora stanu układu (1.22).

Układ (1.22) jest stabilny w sensie definicji 1.14. Na rysunku 1.5 widać, że czas, po którym norma wektora stanu układu (1.22) ostatecznie spełnia ograniczenie B, zależy od warunków początkowych.

Definicja 1.14 określa więc bardzo użyteczną cechę, polegającą na tym, że wszystkie trajektorie układu trafią po pewnym, skończonym czasie do tego samego otoczenia punktu



Rys. 1.5. Przebieg normy wektora stanu

zerowego. Od warunku początkowego zależy ten czas, ale nie promień B tego otoczenia. Jeżeli dodatkowo możemy zmniejszać B, na przykład poprzez parametry projektowe układu sterowania, to ostateczna jednostajna ograniczoność jest w pełni wystarczająca do praktycznej stabilizacji rzeczywistych układów regulacji.

Rozdział 2

BEZPOŚREDNIA METODA LAPUNOWA – UKŁADY STACJONARNE

Tak zwana bezpośrednia metoda Lapunowa, która została po raz pierwszy sformułowana w doktoracie 35-letniego Aleksandra Michajłowicza Lapunowa w 1892 roku, w Charkowie, określa dostateczne warunki stabilności punktów równowagi nieliniowych układów dynamicznych. Pozwala na udowodnienie stabilności bez konieczności badania rozwiązania równania różniczkowego, którym jest opisany układ, to jest

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{2.1}$$

a jedynie poprzez analizę właściwości pola wektorowego $f(x)$ w przestrzeni stanów.

W tym miejscu zostanie przedstawiona bezpośrednia metoda Lapunowa w klasycznej postaci, dla układów stacjonarnych (2.1). Jak wspomniano w rozdziale pierwszym, bez ograniczenia ogólności rozważań można przyjąć, że $x_e = 0$ jest punktem równowagi układu (2.1), czyli $f(0) = 0$, i stabilność tego punktu będzie badana.

2.1. Podstawowe twierdzenie o stabilności

Rozważmy otwarte otoczenie D punktu zerowego w R^n.

Definicja 2.1. Funkcja $V: D \to R$ jest nazywana:

- dodatnio określoną, jeśli $V(0) = 0$ i $\forall_{x \neq 0}\ V(x) > 0$,
- dodatnio półokreśloną, jeśli $V(0) = 0$ i $\forall_{x \neq 0}\ V(x) \geq 0$,
- ujemnie określoną (ujemnie półokreśloną), jeśli $-V(x)$ jest dodatnio określona (dodatnio półokreślona).

Niech $V: D \to R$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły (to jest jej pierwsze pochodne cząstkowe są ciągłe). Jeżeli obliczamy jej wartości wzdłuż trajektorii

$x(t) = x(t; t_0, x_0)$ układu (2.1), to staje się ona funkcją czasu. Jej pochodną względem czasu można obliczyć tak jak pochodną funkcji złożonej

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(x(t)) = \nabla V(x(t))\dot{x}(t) = \nabla V(x(t)) f(x(t)), \tag{2.2}$$

gdzie

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Definicja 2.2. Funkcja $\dot{V}\colon D \to R$, $\dot{V}(x) = \nabla V(x) f(x)$ jest nazywana pochodną funkcji V wzdłuż trajektorii systemu (2.1), lub krótko pochodną systemową funkcji V. Funkcja $\dot{V}(x)$ jest też nazywana pochodną Lie'go wzdłuż pola wektorowego f i oznaczana $L_f V(x)$.

Twierdzenie 2.1 (twierdzenie Lapunowa o stabilności)

Jeżeli istnieje funkcja $V\colon D \to R$ różniczkowalna w sposób ciągły, dodatnio określona w D i taka, że jej pochodna systemowa $\dot{V}\colon D \to R$ jest ujemnie półokreślona w D, to punkt równowagi $x_e = 0$ układu (2.1) jest stabilny. Jeśli jej pochodna systemowa $\dot{V}\colon D \to R$ jest ujemnie określona w D, to punkt równowagi $x_e = 0$ układu (2.1) jest asymptotycznie stabilny.

Dowód:

Zgodnie z definicją 1.4 weźmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, bez ograniczenia ogólności można przyjąć, że kula o promieniu ε zawiera się w D (rys. 2.1):

$$B_\varepsilon = \{x \in R^n : \|x\| \le \varepsilon\} \subset D. \tag{2.4}$$

Niech

$$\alpha = \min_{\|x\|=\varepsilon} V(x). \tag{2.5}$$

Liczba α jest dodatnia, bo $V(x) > 0$ wszędzie poza $x = 0$. Weźmy więc liczbę β, $0 < \beta < \alpha$ i oznaczmy zbiór

$$\Omega_\beta = \{x \in B_\varepsilon : V(x) \le \beta\}. \tag{2.6}$$

Oczywiście z definicji tego zbioru wynika, że $\Omega_\beta \subset B_\varepsilon$. Rozważmy dowolną trajektorię $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ układu (2.1), taką że $x_0 \in \Omega_\beta$. Wzdłuż tej trajektorii mamy $\dot{V}(x) \le 0$, więc i $V(x(t)) \le V(x_0) \le \beta$, czyli cała trajektoria $x(t)$ pozostanie w zbiorze $\Omega_\beta \subset B_\varepsilon$ dla dowolnego t. Co więcej, z ciągłości funkcji $V(x)$ wynika, że istnieje $\delta > 0$, taka że

$$\|x\| < \delta \Rightarrow V(x) < \beta, \tag{2.7}$$

czyli zachodzi $B_\delta = \{x \in R^n : \|x\| < \delta\} \subset \Omega_\beta \subset B_\varepsilon$. Tak więc, z takim wyborem δ implikacja

$$\|x\| < \delta \Rightarrow \|x\| < \varepsilon \tag{2.8}$$

jest prawdziwa i zgodnie z definicją 1.4 punkt równowagi $x_e = 0$ układu (2.1) jest stabilny w sensie Lapunowa.