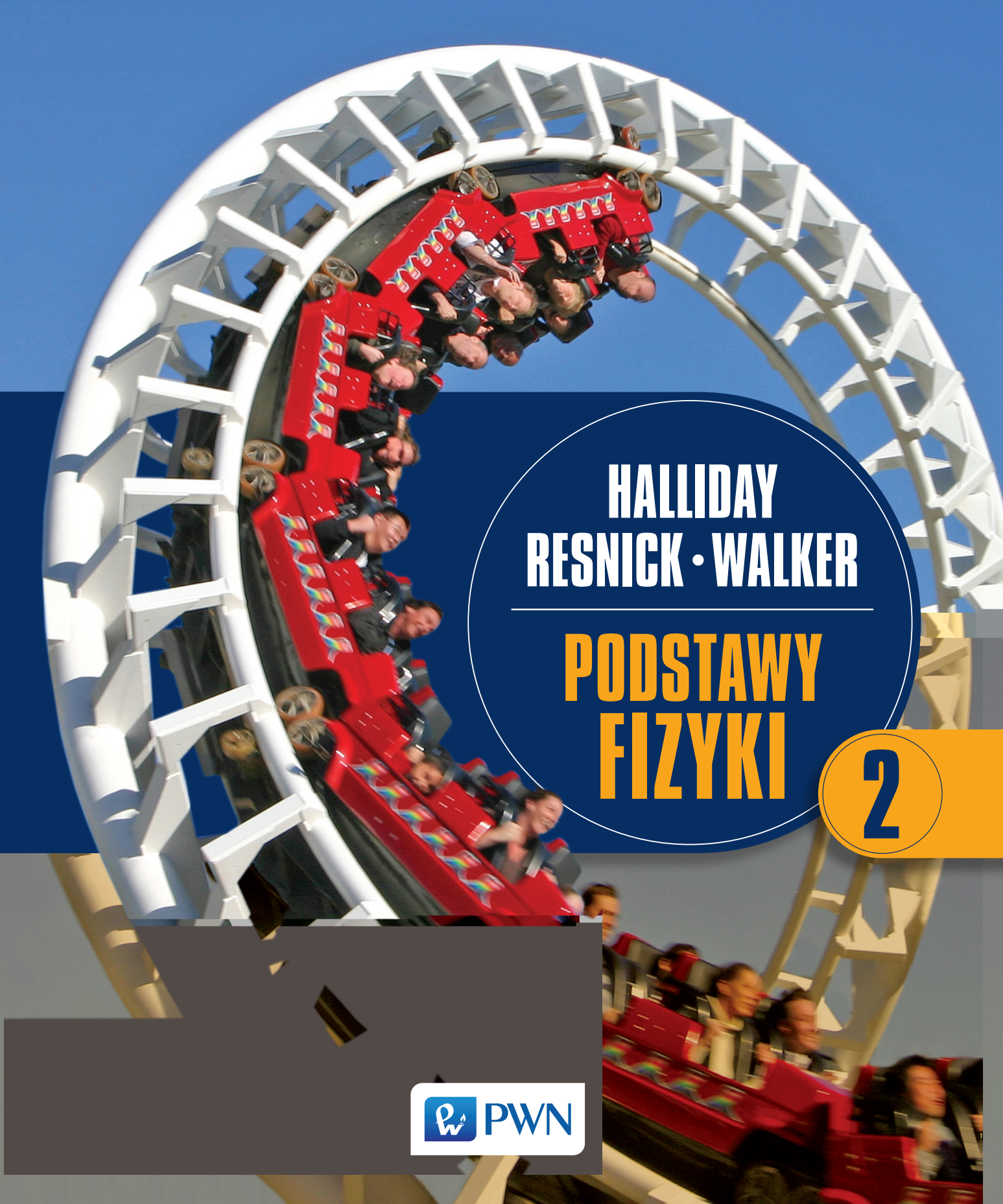


A photograph of a roller coaster with red cars and white tracks, looping upside down against a clear blue sky. The cars are filled with people, and the track forms a large circular loop.

**HALLIDAY
RESNICK • WALKER**

**PODSTAWY
FIZYKI**

2

WYBRANE WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNE (WARTOŚCI ZAOKRĄGLONE)

Powietrze (suche, w temp. 20°C i pod ciśn. 1 atm)

gęstość	1,21 kg/m ³
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	1010 J/(kg · K)
stosunek ciepła właściwych c_p/c_v	1,40
prędkość dźwięku	343 m/s
natężenie pola elektrycznego przebicia	$3 \cdot 10^6$ V/m
efektywna masa molowa	0,0289 kg/mol

Woda

gęstość	1000 kg/m ³
prędkość dźwięku	1460 m/s
ciepło właściwe pod stałym ciśnieniem	4190 J/(kg · K)
ciepło topnienia (w temp. 0°C)	333 kJ/kg
ciepło parowania (w temp. 100°C)	2260 kJ/kg
współczynnik załamania ($\lambda = 589$ nm)	1,33
masa molowa	0,0180 kg/mol

Ziemia

masa	$5,98 \cdot 10^{24}$ kg
średni promień	$6,37 \cdot 10^6$ m
przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi	9,8 m/s ²
standardowe ciśnienie atmosferyczne	$1,01 \cdot 10^5$ Pa
okres ruchu satelity na orbicie oddległej od Ziemi o 100 km	86,3 min
promień orbity geostacjonarnej	42 200 km
prędkość ucieczki	11,2 km/s
dipolowy moment magnetyczny	$8,0 \cdot 10^{22}$ A · m ²
średnie pole elektryczne na powierzchni Ziemi	150 V/m, skierowane w dół

Odległości od Ziemi

do Księżyca	$3,82 \cdot 10^8$ m
do Słońca	$1,50 \cdot 10^{11}$ m
do najbliższej gwiazdy	$4,04 \cdot 10^{16}$ m
do środka naszej Galaktyki	$2,2 \cdot 10^{20}$ m
do galaktyki Andromedy	$2,1 \cdot 10^{22}$ m
do granicy obserwowalnego Wszechświata	$\sim 10^{26}$ m

WZORY MATEMATYCZNE — PATRZ DODATEK E

ALFABET GRECKI

alfa	A	α	iota	I	ι	ro	P	ρ
beta	B	β	kappa	K	κ	sigma	Σ	σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	T	τ
delta	Δ	δ	mi	M	μ	ypsilon	Υ	υ
epsilon	E	ϵ	ni	N	ν	fi	Φ	ϕ, φ
dzeta	Z	ζ	ksi	Ξ	ξ	chi	X	χ
eta	H	η	omikron	O	o	psi	Ψ	ψ
theta	Θ	θ	pi	Π	π	omega	Ω	ω

**HALLIDAY
RESNICK • WALKER**

**PODSTAWY
FIZYKI**

2

Przekład z języka angielskiego

wydanie 1: **Rafał Bożek, Włodzimierz Komar, Mirosław Łukaszewski**

wydanie 2: **Rafał Bożek, Mirosław Łukaszewski**



David
HALLIDAY
Robert Jearl
RESNICK • WALKER

PODSTAWY FIZYKI

2

WYDANIE 2

 PWN

Dane oryginału

Fundamentals of Physics Extended, 10th edition, by Jearl Walker, David Halliday, Robert Resnick

Copyright © 2014, 2011, 2008, 2005 John Wiley & Sons, Inc.

All rights reserved. This translation under licence with the original publisher John Wiley & Sons, Inc.

Projekt okładki i stron tytułowych **Przemysław Spiechowski**

Ilustracja na okładce **jabiru/Depositphotos**

Przekład z języka angielskiego: wydanie 1: **Rafał Bożek** (rozdz. 19–21)

Włodzimierz Komar (rozdz. 16–18)

Mirosław Łukaszewski (rozdz. 13–15)

wydanie 2: **Rafał Bożek** (rozdz. 18–20)

Mirosław Łukaszewski (rozdz. 12–17)

Wydawca **Izabela Ewa Mika**

Redaktor prowadzący **Irena Puchalska**

Redaktor merytoryczny **Anna Bogdanienko** (rozdz. 12)

Ewa Charitonow (rozdz. 13–20)

Produkcja **Mariola Grzywacka**

Łamanie **FixPoint, Warszawa**

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo.

Więcej na www.legalnakultura.pl

Polska Izba Książki

Copyright © for the Polish edition by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2003, 2015

ISBN 978-83-01-18122-2 tom 2

ISBN 978-83-01-18123-9 tomy 1–5

Wydanie drugie

Wydawnictwo Naukowe PWN SA

02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2

infolinia 801 33 33 88

tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288

e-mail: pwn@pwn.com.pl, www.pwn.pl

Druk i oprawa: Drukarnia Art-Druk, Kobyłka

S P I S T R E Ś C I

TOM 1

1. Pomiar
2. Ruch prostoliniowy
3. Wektory
4. Ruch w dwóch i trzech wymiarach
5. Siła i ruch I
6. Siła i ruch II
7. Energia kinetyczna i praca
8. Energia potencjalna i zachowanie energii
9. Środek masy i pęd
10. Obroty
11. Toczenie się ciał, moment siły i moment pędu

TOM 2

12. Równowaga i sprężystość
13. Grawitacja
14. Płyyny
15. Drgania
16. Fale I
17. Fale II
18. Temperatura, ciepło i pierwsza zasada termodynamiki
19. Kinetyczna teoria gazów
20. Entropia i druga zasada termodynamiki

TOM 3

21. Prawo Coulomba
22. Pole elektryczne

23. Prawo Gaussa
24. Potencjał elektryczny
25. Pojemność elektryczna
26. Prąd elektryczny i opór elektryczny
27. Obwody elektryczne
28. Pole magnetyczne
29. Pole magnetyczne wywołane przepływem prądu
30. Zjawisko indukcji i indukcyjność
31. Drgania elektromagnetyczne i prąd zmienny
32. Równanie Maxwella: magnetyzm materii

TOM 4

33. Fale elektromagnetyczne
34. Obrazy
35. Interferencja
36. Dyfrakcja
37. Teoria względności

TOM 5

38. Fotony i fale materii
39. Jeszcze o falach materii
40. Wszystko o atomach
41. Przewodnictwo elektryczne ciał stałych
42. Fizyka jądrowa
43. Energia jądrowa
44. Kwarki, leptoni i Wielki Wybuch

Dodatki

S P I S T R E Ś C I

Od Wydawcy do drugiego wydania polskiego xi

Przedmowa xiii

Podziękowania xxi

12. Równowaga i sprężystość 1

12.1. Równowaga 1

O fizyce 1

Równowaga 2

Warunki równowagi 3

Środek ciężkości 5

12.2. Kilka przykładów równowagi statycznej 7

Kilka przykładów równowagi statycznej 7

12.3. Sprężystość 14

Układy nieoznaczone 15

Sprężystość 16

Podsumowanie 20 Pytania 21 Zadania 23

13. Grawitacja 36

13.1. Prawo powszechnego ciążenia 36

O fizyce 36

Prawo powszechnego ciążenia 37

13.2. Grawitacja a zasada superpozycji 39

Grawitacja a zasada superpozycji 40

13.3. Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi 43

Grawitacja w pobliżu powierzchni Ziemi 43

13.4. Grawitacja wewnątrz Ziemi 47

Grawitacja wewnątrz Ziemi 47

13.5. Grawitacyjna energia potencjalna 49

Grawitacyjna energia potencjalna 50

13.6. Planety i satelity: prawa Keplera 55

Planety i satelity: prawa Keplera 55

13.7. Satelity: orbity i energia 58

Satelity: orbity i energia 59

13.8. Grawitacja według Einsteina 62

Grawitacja według Einsteina 62

Podsumowanie 65 Pytania 66 Zadania 68

14. Płyyny 78

14.1. Płyyny, gęstość i ciśnienie 78

O fizyce 78

Co to jest płyn? 79

Gęstość i ciśnienie 79

14.2. Płyyny w spoczynku 81

Płyyny w spoczynku 82

14.3. Jak się mierzy ciśnienie? 86

Jak się mierzy ciśnienie? 86

14.4. Prawo Pascala 87

Prawo Pascala 88

14.5. Prawo Archimedesza 90

Prawo Archimedesza 90

14.6. Równanie ciągłości 94

Ruch płynów doskonałych 95

Równanie ciągłości 96

14.7. Równanie Bernoulliego 99

Równanie Bernoulliego 99

Podsumowanie 103 Pytania 104 Zadania 105

15. Drgania 116

15.1. Ruch harmoniczny 116

O fizyce 117

Ruch harmoniczny 118

Siła w ruchu harmonicznym 123

15.2. Energia w ruchu harmonicznym 127

Energia w ruchu harmonicznym 127

15.3. Wahadło torsyjne 129

Wahadło torsyjne 129

15.4. Wahadła, ruch po okręgu 131

Wahadła 131

Ruch harmoniczny a ruch jednostajny po okręgu 135

15.5. Ruch harmoniczny tłumiony 137

Ruch harmoniczny tłumiony 138

15.6. Drgania wymuszone i rezonans 140

Drgania wymuszone i rezonans 140

Podsumowanie 142 Pytania 143 Zadania 145

16. Fale I 156**16.1. Fale poprzeczne 156**

O fizyce 157

Rodzaje fal 157

Fale poprzeczne i podłużne 157

Długość fali i częstotliwość 159

Prędkość fali biegnącej 162

16.2. Prędkość fali w napiętej linie 165

Prędkość fali w napiętej linie 165

16.3. Energia i moc fali biegnącej w linie 168

Energia i moc fali biegnącej w linie 168

16.4. Równanie falowe 170

Równanie falowe 171

16.5. Interferencja fal 173

Zasada superpozycji fal 173

Interferencja fal 174

16.6. Wskazy 178

Wskazy 178

16.7. Fale stojące i rezonans 181

Fale stojące 182

Fale stojące i rezonans 184

Podsumowanie 188 Pytania 189 Zadania 190

17. Fale II 200**17.1. Prędkość dźwięku 200**

O fizyce 200

Fale dźwiękowe 201

Prędkość dźwięku 201

17.2. Biegące fale dźwiękowe 204

Biegące fale dźwiękowe 204

17.3. Interferencja 208

Interferencja 208

17.4. Natężenie i głośność dźwięku 211

Natężenie i głośność dźwięku 212

17.5. Źródła dźwięków w muzyce 216

Źródła dźwięków w muzyce 216

17.6. Dudnienia 221

Dudnienia 221

17.7. Zjawisko Dopplera 223

Zjawisko Dopplera 224

17.8. Prędkości naddźwiękowe, fale uderzeniowe 229

Prędkości naddźwiękowe, fale uderzeniowe 229

Podsumowanie 230 Pytania 231 Zadania 232

18. Temperatura, ciepło i pierwsza zasada termodynamiki 244**18.1. Temperatura 244**

O fizyce 244

Temperatura 245

Zerowa zasada termodynamiki 245

Pomiary temperatury 247

18.2. Skale Celsjusza i Fahrenheita 249

Skale Celsjusza i Fahrenheita 249

18.3. Rozszerzalność cieplna 251

Rozszerzalność cieplna 251

18.4. Pochłanianie ciepła 254

Temperatura i ciepło 255

Pochłanianie ciepła przez ciała stałe i ciecze 256

18.5. Pierwsza zasada termodynamiki 261

Bliższe spojrzenie na ciepło i pracę 262

Pierwsza zasada termodynamiki 265

Niektóre szczególne przypadki pierwszej zasady termodynamiki 266

18.6. Mechanizmy przekazywania ciepła 269

Mechanizmy przekazywania ciepła 270

Podsumowanie 275 Pytania 276 Zadania 278

19. Kinetyczna teoria gazów 288**19.1. Liczba Avogadra 288**

O fizyce 288

Liczba Avogadra 289

19.2. Gazy doskonałe 290

Gazy doskonałe 290

19.3. Ciśnienie, temperatura i prędkość średnia kwadratowa 294

Ciśnienie, temperatura i prędkość średnia kwadratowa 295

19.4. Energia kinetyczna ruchu postępowego 297

Energia kinetyczna ruchu postępowego 298

19.5. Średnia droga swobodna 298

Średnia droga swobodna 299

19.6. Rozkład prędkości cząsteczek 301

Rozkład prędkości cząsteczek 302

19.7. Molowe ciepła właściwe gazu doskonałego 306

Molowe ciepła właściwe gazu doskonałego 307

19.8. Stopnie swobody a molowe ciepła właściwe 312

Stopnie swobody a molowe ciepła właściwe 313

Nieco fizyki kwantowej 315

19.9. Rozprężanie adiabatyczne gazu doskonałego 316

Rozprężanie adiabatyczne gazu doskonałego 317

Podsumowanie 322 Pytania 323 Zadania 324

20. Entropia i druga zasada termodynamiki 332**20.1. Entropia 332**

O fizyce 333

Procesy nieodwracalne i entropia 333

Zmiana entropii 334

Druga zasada termodynamiki 339

20.2. Entropia w świecie rzeczywistym: silniki 341

Entropia w świecie rzeczywistym: silniki 342

20.3. Chłodziarki i silniki rzeczywiste 348

Entropia w świecie rzeczywistym: chłodziarki 349

Sprawność silników rzeczywistych 351

20.4. Statystyczne spojrzenie na entropię 352

Statystyczne spojrzenie na entropię 353

Podsumowanie 357 Pytania 358 Zadania 359

Dodatki 367**A. Międzynarodowy Układ Jednostek (SI) 367****B. Niektóre podstawowe stałe fizyczne 369****C. Niektóre dane astronomiczne 371****D. Współczynniki zamiany jednostek 373****E. Wzory matematyczne 377****F. Właściwości pierwiastków 380****G. Układ okresowy pierwiastków 383****Autorzy zdjęć 384****Odpowiedzi 385****Skorowidz 389**

OD WYDAWCY DO DRUGIEGO WYDANIA POLSKIEGO

Od czasu gdy do rąk polskich Czytelników trafiło I wydanie *Podstaw fizyki*, będące tłumaczeniem VI wydania oryginalnego, na rynku amerykańskim ukazały się trzy kolejne wydania tego znakomitego podręcznika. Obecne, II wydanie polskie jest tłumaczeniem **X wydania oryginalnego**.

W książce poczyniono pewne zmiany. Podzielono na nowo rozdziały, tak by podrozdziały dotyczyły jednego podstawowego pojęcia. Na początku każdego z nich dodano listę celów nauczania, a po nich informację o podstawowych faktach, które należy przyswoić. Dodatkowo znacznie zmodyfikowano rozdziały o prawie Gaussa i potencjale elektrycznym, które sprawiały studentom największą trudność. W rozdziałach dotyczących fizyki kwantowej rozszerzono natomiast omówienie równania Schrödingera. Oddzielono również opis modelu atomu Bohra od rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru. Dodano także podrozdział o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i prawie Plancka.

Cenne uzupełnienie stanowi 16 nowych przykładów napisanych z myślą o dokładniejszym wyjaśnieniu fragmentów wykładu oraz 250 nowych zadań domowych i 50 pytań.

Dodatkowo wydawca oryginału na swojej platformie WileyPLUS udostępnia czytelnikom dynamiczne centrum kształcenia (strony <https://www.wileyplus.com/WileyCDA/> oraz <http://www.webassign.net/index.html>). Opis jego zawartości znajduje się w Przedmowie. Studenci uczelni w USA otrzymują dostęp do materiałów po wykonaniu trzech kroków: zalogowaniu się, podaniu kodu (który otrzymali wraz zakupionym podręcznikiem lub który zakupili osobno) i podaniu URL, który uzyskali od wykładowcy.

Polscy czytelnicy mogą uzyskać dostęp do części tych udogodnień ze strony*:

<http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1118230728.html>

Natomiast strona

<http://bcs.wiley.com/he-bcs/>

[Books?action=index&bcsId=1074&itemId=0471320005](http://bcs.wiley.com/he-bcs/Books?action=index&bcsId=1074&itemId=0471320005)

zawiera podobne zasoby dla szóstego wydania amerykańskiego.

*Stan na 27 lutego 2015 r. Po kliknięciu *Visit Companion Site* (w polu *Students Resources*) otwiera się strona *Students Companion Site*. Po wybraniu *Browse by Resource* jest wyświetlana lista obejmująca: symulacje (*Concept Simulations*), eseje Jearla Walkera (*Jearl Walker Essays*), instrukcje użycia kalkulatorów (*Programmable Calculator Instructions*) oraz interaktywne rozwiązania zadań (*Interactive Learning Ware*).

P R Z E D M O W A

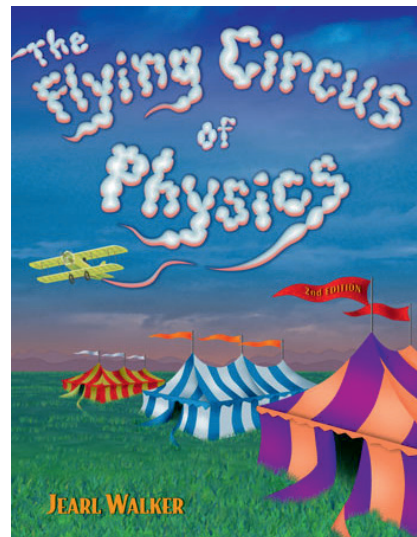
DLACZEGO NAPISAŁEM TĘ KSIĄŻKĘ

Fizyka to wielkie wyzwanie, ale również świetna zabawa. Uprzytomniłem to sobie w pełni w dniu, gdy Sharon, jedna w moich studentek, zapytała mnie nagle: „A czy cokolwiek z tego wszystkiego ma jakiś związek z moim codziennym życiem?”. Oczywiście natychmiast odpowiedziałem: „Sharon, to wszystko ma związek z twoim codziennym życiem — taka już jest fizyka”.

Poprosiła, bym wyjaśnił jej to na jakimś przykładzie. Myślałem i myślałem, i żaden dobry przykład nie przychodził mi do głowy. Wieczorem tego dnia zacząłem pisać książkę *The Flying Circus of Physics* (*Latający cyrk fizyki*, John Wiley & Sons Inc., 1975), głównie dla Sharon, ale i dla siebie, gdyż zdałem sobie sprawę, że czuję to samo, co ona. Przez sześć lat szukałem najbardziej mi odpowiadającego podręcznika fizyki. Testowałem ich dziesiątki, były dobrze napisane i oparte na najlepszych koncepcjach dydaktycznych, lecz czegoś mi w nich brakowało. Fizyka to najciekawszy na świecie przedmiot, gdyż mówi o tym, jak świat naprawdę działa. Tymczasem większość podręczników fizyki jest niemal całkiem pozbawiona informacji o związkach fizyki z otaczającym nas światem. Cała przyjemność studiowania fizyki gdzieś więc umyka.

W *Podstawach fizyki* zawarłem wiele fizyki związanej ze światem wokół nas, a także powiązałem ten podręcznik z nowym wydaniem *Latającego cyrku fizyki*. Materiał czerpałem w większości z treści moich zajęć z podstaw fizyki, podczas których mogę najlepiej poznać po wyrazie twarzy i szczerych uwagach studentów, które tematy i sposoby ich przedstawienia trafiają do słuchaczy, a które nie. Zapisywałem przypadki, w których odniosłem sukcesy, i te, w których poniosłem porażki, co mi potem pomogło zdecydować, co umieścić w tej książce. Od dość już odległego czasu, gdy spotkałem Sharon, mówię wszystkim studentom wciąż to samo: „Tak, wychodząc od podstawowych pojęć fizyki, możesz naprawdę dojść na drodze rozumowania aż do wniosków dotyczących świata, z którym stykasz się na co dzień, a dopiero zrozumienie, jak działa świat wokół nas, to prawdziwa przyjemność, jakiej dostarcza nam fizyka”.

Pisząc tę książkę, miałem wiele celów, a najważniejszym z nich było danie wykładowcom narzędzi do nauczania studentów, jak skutecznie czytać tekst podręcznika, identyfikować podstawowe pojęcia, rozumować, zadając istotne pytania, i wreszcie rozwiązywać zagadnienia ilościowe. To nie jest proces łatwy ani dla studentów, ani dla wykładowców. Zajęcia, których podstawą będzie ta książka, mogą się okazać najtrudniejsze z odbywanych przez studenta. Mogą być też jednak najbardziej pożyteczne, gdyż dotyczą podstawowych metod poznania, jak działa świat, z których korzystają wszystkie inne nauki przyrodnicze i dziedziny techniki.



Wielu użytkowników wydania dziewiątego (zarówno wykładowców, jak i studentów) przysłało mi uwagi dotyczące podręcznika i sugestie jego ulepszenia. Te uwagi i sugestie zostały uwzględnione w tekście i zadaniach obecnego wydania. Wydawca — John Wiley & Sons — i ja traktujemy tę książkę jako projekt otwarty i zachęcamy wszystkich jej użytkowników do pisania do nas. Sugestie, poprawki oraz uwagi, pozytywne i negatywne, prosimy przysyłać na adres wydawnictwa John Wiley & Sons lub mój, Jearla Walkera: Physics Department, Cleveland State University, Cleveland, OH 44115, USA (można również skorzystać z bloga na stronie www.flyingcircusofphysics.com). Możemy nie dać rady odpowiedzieć na wszystkie listy, lecz zapoznamy się z każdym z nich.

CO JEST W KSIĄŻCE NOWEGO

Nowe podrozdziały i cele nauczania „Czego powinienem się nauczyć z tego podrozdziału?”, pytali mnie zawsze studenci — nie tylko najstabsi, najlepsi także. Rzec w tym, że nawet dobry, myślący student może nie być pewien, czy w trakcie lektury fragmentu książki wychwycił najważniejsze zawarte tam fakty i stwierdzenia. I ja tak się czułem dawno temu, gdy na pierwszym roku studiów, ucząc się fizyki, korzystałem z pierwszego wydania podręcznika Hallidaya i Resnicka.

Aby pomóc w tym względzie studentom, podzieliłem na nowo rozdziały, tak by podrozdziały dotyczyły jednego podstawowego pojęcia, a na początku każdego podrozdziału dodałem listę celów nauczania. Taka lista to spis podstawowych treści nauczania i umiejętności, jakie student powinien opanować podczas lektury danego podrozdziału. Po spisie celów nauczania jest krótka informacja o podstawowych faktach, które trzeba sobie przyswoić — na przykład pierwszy podrozdział rozdziału 16, w którym student musi poznać wyjątkowo wiele nowych pojęć i terminów. Nie będzie jednak musiał sam dokonywać identyfikacji podstawowych faktów, ponieważ dostaje od autora książki spis, w istocie rzeczy podobny do listy czynności, jakie musi wykonać pilot samolotu przed skierowaniem pojazdu na pas startowy i samym startem.



Powiązanie zadań domowych z celami nauczania Pytania i zadania zamieszczone na końcu każdego rozdziału są przypisane — na platformie *Wiley-PLUS* — do jednego z celów nauczania, tak by od razu odpowiedzieć na pytanie (zwykle niewypowiedziane): „W jakim celu rozwiązuję to zadanie? Czego ma mnie ono nauczyć?”. Jestem przekonany, że znając cel zadania, student lepiej się nauczy wykorzystywać ten cel nauczania w zadaniach o innej treści, lecz dotyczących tych samych podstawowych faktów. Powinno się w ten sposób pokonać problem wielu studentów, którzy po rozwiązaniu konkretnego zadania nie potrafią skorzystać z tych samych podstawowych faktów w zadaniach dotyczących nieco odmiennych sytuacji.

Rozdziały napisane na nowo Rok po roku moi studenci oceniali pewne ważne rozdziały oraz niektóre fragmenty innych jako szczególnie trudne. Postanowiłem więc w obecnym wydaniu dokonać w tych miejscach wielu zmian. Na przykład, znacznie zmodyfikowałem rozdziały o prawie Gaussa i potencjale elektrycznym, które sprawiały moim studentom wiele trudności. Tok wykładu jest tam teraz bardziej płynny i skupiony na podstawo-

wych faktach. W rozdziałach dotyczących fizyki kwantowej rozszerzyłem omówienie równania Schrödingera, dodając zagadnienie odbicia fal materii od stopnia potencjału. Na prośbę wielu wykładowców oddzieliłem opis modelu atomu Bohra od rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru, tak by fragment o pracach Bohra, mających już dziś tylko historyczne znaczenie, można było opuścić. Dodałem również podrozdział o promieniowaniu ciała doskonale czarnego i prawie Plancka.

Nowe przykłady oraz pytania i zadania domowe Podręcznik zawiera teraz szesnaście nowych przykładów napisanych z myślą o dodatkowym wyjaśnieniu fragmentów wykładu, które moi studenci uważali za szczególnie trudne. Do zebranych w końcowych częściach rozdziałów pytań i zadań domowych dodano łącznie 250 zadań i 50 pytań. Niektóre z nich przywrócono z poprzednich wydań książki, o co prosiło wielu wykładowców.

Ilustracje wideo W wersji elektronicznej podręcznika, dostępnej na platformie WileyPLUS, można znaleźć około 30 rysunków i fotografii z książki, przygotowanych w wersji wideo przez Davida Maiullo z Rutgers University. Fizyka dotyczy bardzo często ruchu różnych obiektów — film pokazuje w takich przypadkach znacznie więcej niż statyczny rysunek lub fotografia.

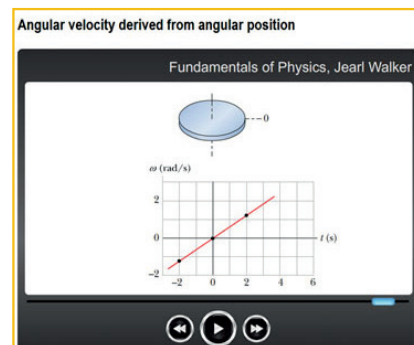
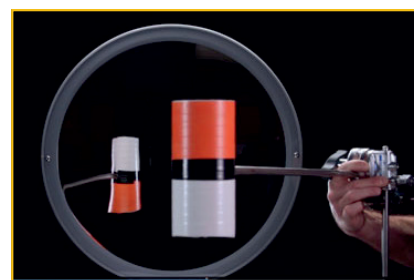
Pomoc online Platforma WileyPLUS zawiera nie tylko program do oceniania studentów online. Jest to dynamiczne centrum kształcenia, gdzie można znaleźć między innymi szczegółowe omówienie rozwiązań wielu zadań, quizy sprawdzające zrozumienie studiowanego materiału, animacje, setki przykładów, wiele symulacji i pokazów oraz ponad 1500 filmów, których tematy obejmują przegląd niezbędnych zagadnień matematycznych po miniwykłady dotyczące przykładów z podręcznika. Wiele nowych elementów tej pomocy online pojawia się na platformie WileyPLUS co semestr. W ramach przygotowania niniejszego 10. wydania podręcznika wiele fotografii dotyczących ruchu ciał zastąpiono filmami, dzięki czemu ruch można spowolnić, by analizować go szczegółowo.

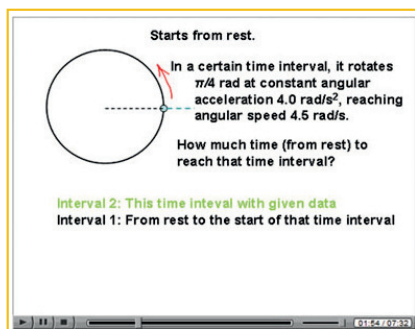
Tysiące takich elementów pomocy online jest dostępnych w trybie 24/7, a korzystać z nich można powielokrotnie — tyle razy, ile tylko potrzeba. Jeśli więc na przykład student popadnie w kłopoty przy rozwiązaniu zadania domowego o godzinie 2 w nocy (co jest chyba typową godziną odrabiania przez studentów pracy domowej), to za pomocą jednego kliknięcia myszą będzie mógł skorzystać z przyjaznej pomocy online.

NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

Gdy sam studiowałem fizykę, korzystając z pierwszego wydania podręcznika Hallidaya i Resnicka, musiałem ten sam rozdział czytać wiele razy, by go dobrze zrozumieć. Dziś lepiej zdajemy sobie sprawę z tego, że różni studenci uczą się wydajnie w bardzo różny sposób. Przygotowałem więc dla nich różnego rodzaju narzędzia dydaktyczne zawarte teraz w nowym wydaniu podręcznika oraz na platformie WileyPLUS. Są to:

Animacje kluczowych ilustracji z każdego rozdziału. W tekście książki są one oznaczone ikonką wiru. W wersji elektronicznej rozdziału, na platformie WileyPLUS, kliknięcie myszką uruchamia animację. Wybrałem ilustracje, które zawierają wiele informacji, tak by student zyskiwał możliwie





dużo, obserwując przez minutę lub dwie fizykę w działaniu, a nie tylko rysunek w podręczniku. Student poznaje w ten sposób dynamikę zjawisk fizycznych, przy czym oczywiście animację może sobie powtarzać, ile razy chce.

Filmy Nagrałem już ponad 1500 krótkich filmów (a co semestr powstają nowe). Odtwarzając taki film, student widzi, co rysuję lub piszę, słysząc jednocześnie, jak omawiam jakieś zagadnienie, tak jakby siedział przy mnie w gabinecie, a ja — mówiąc do niego — pisałbym lub rysował coś na kartce papieru. Oczywiście bezpośredni kontakt z wykładowcą (na wykładzie, ćwiczeniach czy konsultacjach) pozostanie zawsze najlepszą z metod dydaktycznych, ale moje filmy wideo też mają swoje zalety — są dostępne 24 godziny na dobę przez 7 dni w tygodniu i można je oglądać dowolnie wiele razy. Oto różne rodzaje tych filmów:

- **Ponowne omówienie treści niektórych rozdziałów** (jak na konsultacjach). Skupiłem się na tematach, które sprawiają studentom najwięcej trudności, czyli na tych, przy których moi studenci najczęściej drapali się w głowę.
- **Przypomnienie matematyki ze szkoły średniej**, między innymi podstawowe operacje algebraiczne, funkcje trygonometryczne oraz układy równań.
- **Nowe zagadnienia matematyczne**, na przykład mnożenie wektorów.
- **Omówienie każdego przykładu z podręcznika**. Podobnie jak w tekście książki, nie rozglądam się po prostu za wzorem, z którego dałoby się skorzystać, lecz badam fizyczną treść zagadnienia, wychodząc od podstawowych faktów dotyczących zadania. Staram się też pokazać, jak wykorzystać przykłady z książki do poznania typowych metod rozwiązywania zadań, które będzie można później zastosować w innych — być może całkiem odmiennych — zadaniach.
- **Rozwiązania 20% zadań domowych zamieszczonych na końcu rozdziałów**. Dostępność tych rozwiązań zależy od decyzji wykładowcy. Może on na przykład postanowić, by były one widoczne dla studentów dopiero po oddaniu pracy domowej lub rozwiązaniu quizu. Rozwiązania nie mają postaci prostych, rutynowych recept. Jak przy przykładach, wychodzimy od podstawowych faktów i na drodze logicznego rozumowania docieramy do końcowej odpowiedzi. Student poznaje nie tylko rozwiązanie konkretnego zadania, lecz także metody radzenia sobie z dowolnymi zadaniami, nawet całkiem niestandardowymi.
- **Przykłady, jak mądrze korzystać z wykresów** (a nie tylko odczytywać z nich liczby bez zrozumienia fizyki zagadnienia).



Pomoc do zadań Na platformie *WileyPLUS* można znaleźć wiele narzędzi, które opracowałem w celu ułatwienia studentom nabycia umiejętności rozwiązywania zadań. Oto one:

- **Każdy przykład z podręcznika** jest dostępny online zarówno w formie tekstu z książki, jak i w formie wideo.
- **Setki dodatkowych przykładów**. Są one dostępne jako osobne pozycje, lecz wykładowcy mają możliwość umieszczenia linków do nich przy zadaniach domowych. Jeśli na przykład zadanie domowe dotyczy klocka na

równi pochyłej, to link kieruje studenta do przykładu związanego z tym zagadnieniem. Przykład nie jest jednak po prostu kopią zadania, a zatem jego rozwiązanie nie nadaje się do wykorzystania bez zrozumienia (czyli nie można go skopiować i przedstawić jako rozwiązanie zadania domowego).

- **Tutoriale GO** do 15% zadań zamieszczonych na końcu rozdziałów podręcznika. Są to interaktywne rozwiązania zadań, w których pomagam studentowi przebyć w kilku krokach drogę od podstawowych faktów do końcowej odpowiedzi. W każdym kroku student odpowiada na pytanie. Jeśli odpowiedź jest prawidłowa, przechodzi do następnego kroku, a jeśli nie, dostaje dodatkową wskazówkę. Dopiero w ostatnim kroku (prowadzącym do końcowej odpowiedzi) student nie dostaje żadnej odpowiedzi. Zrobiłem to celowo, by na końcu zadania student ponosił całkowitą odpowiedzialność za swoje decyzje. Czasami zadania interaktywne wyprowadzają rozwiązującego w pole, gdy udziela niepoprawnych odpowiedzi, co bywa źródłem frustracji studenta. Moje tutoriale GO to nie pułapki, gdyż w każdej chwili student może wrócić do początku zadania.

- **Wskazówki do wszystkich zadań domowych** są dostępne, lecz ich ujawnienie studentom zależy od decyzji wykładowcy. Są to prawdziwe wskazówki, które dotyczą podstawowych faktów i ogólnej metody rozwiązania, a nie przepisy, jak udzielić prawidłowej odpowiedzi bez zrozumienia, dlaczego jest właśnie taka.

Ocena postępów studenta

- **Pytania dotyczące zawartości rozdziału.** Gdy student otwiera rozdział wersji elektronicznej, na końcu tego rozdziału pojawia się pytanie dotyczące jego zawartości, wybrane losowo z zestawu przygotowanych uprzednio pytań. Sformułowałem je tak, by do podania odpowiedzi nie była potrzebna żadna analiza ani nawet głębsze zrozumienie treści — chodzi tylko o to, by sprawdzić, czy student istotnie przeczytał dany rozdział. Wykładowcy pozostawiono decyzję o tym, czy odpowiedź studenta będzie elementem jego oceny, czy tylko informacją dla czytającego.

- **Większość rozdziałów zawiera sprawdziany.** Są one tak pomyślane, by wymagały pewnej analizy i decyzji studenta co do treści fizycznej rozdziału. *Na końcu książki można znaleźć odpowiedzi do wszystkich sprawdzianów.*



Sprawdzian 1

- **Na platformie WileyPLUS są wszystkie zadania domowe** z podręcznika (a nawet wiele więcej). Wykładowca może wybrać dla studentów zadania domowe, polecić, by zostały przesłane przez sieć, i oceniać je w WileyPLUS. Może na przykład ustalić termin złożenia rozwiązań i pozwolić składać je ograniczoną liczbę razy. Wykładowca może też zdecydować, jakie narzędzia dydaktyczne związane z danym zadaniem domowym zostaną ujawnione studentom — wskazówki, przykłady, omówienie treści rozdziału, rozwiązania interaktywne, powtórzenia podstaw matematycznych, a nawet rozwiązania w postaci wideo. Te ostatnie może udostępnić studentom na przykład po terminie oddania pracy domowej.

GO Tutorial

This GO Tutorial will provide you with a step-by-step guide on how to approach this problem. When you are finished, go back and try the problem again on your own. To view the original question while you work, you can just drag this screen to the side. (This GO Tutorial consists of 4 steps).

Step 1: Solution Step 1 of GO Tutorial 10-30

KEY IDEAS:

(1) When an object rotates at constant angular acceleration, we can use the constant-acceleration equations of Table 10-1, modified for angular motion:

(1) $\omega = \omega_0 + \alpha t$

(2) $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

(3) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

(4) $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$

(5) $\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2} \alpha t^2$

Counterclockwise is the positive direction of rotation, and clockwise is the negative direction.

(2) If a particle moves around a rotation axis at radius r , the magnitude of its radial (centripetal) acceleration a_r at any moment is related to its tangential speed v (the speed along the circular path) and its angular speed at that moment by

$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

(3) If a particle moves around a rotation axis at radius r , the magnitude of its tangential acceleration a_t (the acceleration along the circular path) at any moment is related to angular acceleration α at that moment by

$a_t = r\alpha$

(4) If a particle moves around a rotation axis at radius r , the angular displacement through which it rotates is related to the distance s it moves along its circular path by

$s = r\Delta\theta$

GETTING STARTED: What is the radius of rotation (in meters) of a point on the rim of the flywheel?

Number Unit

exact number, no tolerance

Check Your Input

Step 2: Solution Step 2 of GO Tutorial 10-30

What is the final angular speed in radians per second?

Number Unit

the tolerance is +/-2%

Check Your Input

Step 3: Solution Step 3 of GO Tutorial 10-30

What was the initial angular speed?

Number Unit

exact number, no tolerance

Check Your Input

Step 4: Solution Step 4 of GO Tutorial 10-30

Through what angular distance does the flywheel rotate to reach the final angular speed?

Number Unit

the tolerance is +/-2%

Check Your Input

Now that you know how to solve the problem, go back and try again on your own. Close

- **Rozwiązania symboliczne.** Każdy rozdział zawiera też zadania, w których odpowiedź nie jest liczbowa, lecz ma postać wyrażenia algebraicznego.
- **Na platformie WileyPLUS są również dostępne wszystkie pytania** z końcowych części rozdziałów. Mają one postać pytań wielokrotnego wyboru i służą do oceny zrozumienia przez studenta pojęciowej zawartości rozdziału.

Ikonki pomocy dodatkowej Do niektórych zadań o numerach nieparzystych są dostępne szczegółowe rozwiązania w postaci drukowanej lub elektronicznej. Przy numerze takiego zadania jest umieszczona ikonka (SSM lub WWW) informująca o tym studenta i wykładowcę. Inne ikonki informują o istnieniu dla danego zadania tutoriala GO, rozwiązania interaktywnego w programie Interactive LearningWare oraz powiązania z książką *Latający cyrk fizyki*. Na początku listy zadań w każdym rozdziale jest umieszczona legenda wyjaśniająca znaczenie wszystkich ikonek przy numerach zadań.



Zadania z rozwiązaniami interaktywnymi, udostępnianymi studentom według uznania wykładowcy, znajdują się na stronach WileyPLUS (<https://www.wileyplus.com/WileyCDA/>) oraz WebAssign (<http://www.webassign.net/index.html>)



Liczba kropek określa stopień trudności zadania



Szczegółowe rozwiązanie jest dostępne w *Student Solutions Manual*



Szczegółowe rozwiązanie znajdziesz na stronie <http://www.wiley.com/college/halliday>



Rozwiązanie interaktywne znajdziesz na stronie <http://www.wiley.com/college/halliday>



Więcej informacji znajdziesz w książce *The Flying Circus of Physics* i na stronie <http://flyingcircusofphysics.com>

WERSJE PODRĘCZNIKA*

W celu zaspokojenia indywidualnych potrzeb wykładowców i studentów, dziesiąte wydane *Podstaw fizyki* jest dostępne w kilku wersjach.

Wydanie podstawowe zawiera rozdziały 1–37 (ISBN 9781118230718).

Wydanie rozszerzone zawiera ponadto siedem dodatkowych rozdziałów o fizyce kwantowej i kosmologii, czyli łącznie rozdziały 1–44 (ISBN 9781118230725).

Wydanie dwutomowe: tom 1 — rozdziały 1–20 (mechanika i termodynamika), oprawa twarda, ISBN 9781118233764; tom 2 — rozdziały 21–44 (elektryczność i magnetyzm, optyka oraz fizyka kwantowa), oprawa twarda, ISBN 9781118230732.

MATERIAŁY DODATKOWE DLA WYKŁADOWCÓW

Instructor's Solutions Manual (Zbiór rozwiązań dla wykładowcy), autor: Sen-Ben Liao, Lawrence Livermore National Laboratory. W zbiorze tym podano szczegółowe rozwiązania wszystkich zadań zebranych na końcu poszczególnych rozdziałów. Są one dostępne w formacie MSWord i PDF.

Strona wykładowcy <http://www.wiley.com/college/halliday>

*Polskie wydanie jest tłumaczeniem wydania rozszerzonego (przyp. red.).

- **Instructor's Manual** (Poradnik wykładowcy). Zawiera wyjaśnienia najważniejszych zagadnień z każdego rozdziału, pokazy doświadczeń, projekty doświadczalne i komputerowe, opis filmów i narzędzi, odpowiedzi do wszystkich pytań, zadań i sprawdzianów, przewodnik do zadań z poprzednich wydań podręcznika oraz spis wszystkich zadań, których rozwiązania są dostępne dla studentów (SSM, WWW i ILW).
- **Prezentacje w formacie PowerPoint**. Użyteczna pomoc dla nowych wykładowców — zawiera spis głównych pojęć oraz rysunki i wzory z każdego rozdziału.
- **System badania reakcji sali („clicker”)**, autor pytań: David Marx, Illinois State University. Zawiera on: quiz z prostymi pytaniami do sprawdzenia, czy studenci przeczytali wyznaczony fragment podręcznika, oraz zbiór pytań przeznaczonych na zajęcia prowadzone w trybie wykładu interaktywnego.
- **Wiley Physics Simulations**, autorzy: Andrew Duffy, Boston University, oraz John Gastineau, Vernier Software. Jest to zbiór 50 symulacji interaktywnych (appletów Javy) do wykorzystania w ramach pokazów wykładowych.
- **Wiley Physics Demonstrations**, autor: David Maiullo, Rutgers University. Zbiór cyfrowych filmów, na których przedstawiono 80 standardowych pokazów fizycznych. Można je pokazać na wykładzie, są też udostępnione na platformie *WileyPLUS*. Towarzyszy mu instrukcja dla wykładowcy, zawierająca też pytania typu „clicker”.
- **Test Bank** (bank testów) do 10. wydania książki, gruntownie przebudowany przez Suzanne Willis, Northern Illinois University. Zawiera ponad 2200 pytań testowych wielokrotnego wyboru. Są one także dostępne w komputerowym banku testów, umożliwiającym wykładowcy tworzenie własnych zestawów pytań testowych (w wersjach dla komputerów IBM oraz Macintosh).
- **Wszystkie ilustracje z podręcznika** przygotowane do wyświetlenia na wykładzie oraz wydrukowania.

Ocena online prac domowych i quizów Dziesiąte wydanie *Podstaw fizyki* może być używane nie tylko przy wykorzystaniu platformy *WileyPLUS*, lecz również platform *WebAssignPLUS* oraz *LON-CAPA*, które także umożliwiają wykładowcy zadawanie i ocenianie online prac domowych i quizów. Na platformie *WebAssignPLUS* studenci mają także dostęp do elektronicznej wersji podręcznika.

MATERIAŁY DODATKOWE DLA STUDENTÓW

Strona studenta, <http://www.wiley.com/college/halliday>, została opracowana specjalnie dla użytkowników 10. wydania *Podstaw fizyki*, aby zapewnić studentom dodatkową pomoc w studiowaniu fizyki. Zawiera rozwiązania wybranych zadań z końcowych części rozdziałów (oznaczonych ikonką WWW), ćwiczenia symulacyjne, porady dla użytkowników kalkulatorów programowalnych, a także rozwiązania interaktywne z wykorzystaniem programu *Interactive LearningWare* (patrz niżej).

Student Study Guide (*Poradnik studenta*), autor: Thomas Barrett, Ohio State University, ISBN 9781118230787. Zawiera przegląd najważniejszych pojęć z poszczególnych rozdziałów, opis metod rozwiązywania zadań oraz szczegółowe przykłady.

Student Solutions Manual (*Zbiór rozwiązań dla studenta*), autor: Sen-Ben Liao, Lawrence Livermore National Laboratory, ISBN 9781118230664. Zawiera szczegółowe rozwiązania 15% zadań zebranych w końcowych częściach rozdziałów podręcznika. Został on napisany dla 10. wydania HRW z wykorzystaniem nowatorskiej metody TEAL (Think, Express, Analyze, and Learn — Myśl, Wyrażaj, Analizuj, Poznajaj). Powstała ona i została rozwinięta na uczelni Massachusetts Institute of Technology, gdzie sprawdziła się jako wydajna metoda kształcenia studentów. Zadania rozwiązane z wykorzystaniem tej metody są oznaczone w podręczniku ikonką SSM.

Interactive Learning Ware to oprogramowanie umożliwiające studentowi rozwiązanie 200 zadań z podręcznika. Odbywa się to interaktywnie, tzn. w kolejnych krokach student udziela odpowiedzi, a w przypadku odpowiedzi niepoprawnych uzyskuje pomoc w postaci informacji o typowych błędach. Zadania, które można rozwiązać w ten sposób, są oznaczone ikonką ILW.

Introductory Physics with Calculus as a Second Language *Mastering Problem Solving* (*Wstęp do fizyki dla studentów poznających również rachunek różniczkowy i całkowy: Mistrzowskie rozwiązywanie zadań*), autor: Thomas Barrett, Ohio State University, ISBN 9780471739104. Celem tej małej książeczki jest nauczenie studentów, jak wydajnie i skutecznie rozwiązywać zadania. Student nauczy się z niej rozpoznawania typowej struktury zadań z fizyki, dzielenia ich na dające się opanować etapy i stosowania odpowiednich metod. Książka zawiera również wiele zadań rozwiązanych krok po kroku.

P O D Z I Ę K O W A N I A

Na końcowy kształt podręcznika miało wpływ bardzo wiele osób. Sen-Ben Liao z Lawrence Livermore National Laboratory, James Whitenton z Southern Polytechnic State University i Jerry Shi z Pasadena City College podjęli i wykonali herkulesowe zadanie przygotowania rozwiązań wszystkich zadań z podręcznika. W wydawnictwie John Wiley głównymi redaktorami podręcznika byli Stuart Johnson, Geraldine Osnato i Aly Rentrop, którzy nadzorowali cały projekt od początku do końca. Dziękujemy Elizabeth Swain, redaktorowi do spraw produkcji, za koordynację różnych elementów złożonego procesu produkcji książki. Dziękujemy Maddy Lesure za projekt graficzny książki i okładki, Lee Goldstein za projekt układu strony, Helen Walden za redakcję tekstu, a Lilian Brady za korektę składu. Jennifer Atkins z zapałem wyszukiwała ciekawe i niezwykle zdjęcia. Wydawnictwo John Wiley & Sons, Inc. oraz Jearl Walker są wdzięczni wielu osobom za uwagi i propozycje dotyczące poprzednich wydań podręcznika. Oto te osoby:

Jonathan Abramson, *Portland State University*; Omar Adawi, *Parkland College*; Edward Adelson, *The Ohio State University*; Steven R. Baker, *Naval Postgraduate School*; George Caplan, *Wellesley College*; Richard Kass, *The Ohio State University*; M.R. Khoshbin-e-Khoshnazar, *Research Institution for Curriculum Development & Educational Innovations (Tehran)*; Craig Kletzing, *University of Iowa*; Stuart Loucks, *American River College*; Laurence Lurio, *Northern Illinois University*; Ponn Maheswaranathan, *Winthrop University*; Joe McCullough, *Cabrillo College*; Carl E. Mungan, *U.S. Naval Academy*; Don N. Page, *University of Alberta*; Elie Riachi, *Fort Scott Community College*; Andrew G. Rinzler, *University of Florida*; Dubravka Rupnik, *Louisiana State University*; Robert Schabinger, *Rutgers University*; Ruth Schwartz, *Milwaukee School of Engineering*; Carol Strong, *University of Alabama at Huntsville*; Nora Thornber, *Raritan Valley Community College*; Frank Wang, *LaGuardia Community College*; Graham W. Wilson, *University of Kansas*; Roland Winkler, *Northern Illinois University*; William Zacharias, *Cleveland State University*; Ulrich Zurcher, *Cleveland State University*.

Na zakończenie chcemy podkreślić, że dysponowaliśmy znakomitym zespołem opiniodawców, i pragniemy wyrazić wdzięczność i podziękowanie każdemu z nich. Oto oni:

Maris A. Abolins, *Michigan State University*
Edward Adelson, *Ohio State University*
Nural Akchurin, *Texas Tech*
Yildirim Aktas, *University of North Carolina–Charlotte*
Barbara Andereck, *Ohio Wesleyan University*
Tetyana Antimirova, *Ryerson University*
Mark Arnett, *Kirkwood Community College*
Arun Bansil, *Northeastern University*
Richard Barber, *Santa Clara University*
Neil Basecu, *Westchester Community College*
Anand Batra, *Howard University*
Kenneth Bolland, *The Ohio State University*
Richard Bone, *Florida International University*
Michael E. Browne, *University of Idaho*
Timothy J. Burns, *Leeward Community College*
Joseph Buschi, *Manhattan College*
Philip A. Casabella, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Randall Caton, *Christopher Newport College*

Roger Clapp, *University of South Florida*
W. R. Conkie, *Queen's University*
Renate Crawford, *University of Massachusetts–Dartmouth*
Mike Crivello, *San Diego State University*
Robert N. Davie, Jr., *St. Petersburg Junior College*
Cheryl K. Dellai, *Glendale Community College*
Eric R. Dietz, *California State University at Chico*
N. John DiNardo, *Drexel University*
Eugene Dunnam, *University of Florida*
Robert Endorf, *University of Cincinnati*
F. Paul Esposito, *University of Cincinnati*
Jerry Finkelstein, *San Jose State University*
Robert H. Good, *California State University–Hayward*
Michael Gorman, *University of Houston*
Benjamin Grinstein, *University of California, San Diego*
John B. Gruber, *San Jose State University*
Ann Hanks, *American River College*
Randy Harris, *University of California–Davis*

Samuel Harris, *Purdue University*
Harold B. Hart, *Western Illinois University*
Rebecca Hartzler, *Seattle Central Community College*
John Hubisz, *North Carolina State University*
Joey Huston, *Michigan State University*
David Ingram, *Ohio University*
Shawn Jackson, *University of Tulsa*
Hector Jimenez, *University of Puerto Rico*
Sudhakar B. Joshi, *York University*
Leonard M. Kahn, *University of Rhode Island*
Sudipa Kirtley, *Rose–Hulman Institute*
Leonard Kleinman, *University of Texas at Austin*
Craig Kletzing, *University of Iowa*
Peter F. Koehler, *University of Pittsburgh*
Arthur Z. Kovacs, *Rochester Institute of Technology*
Kenneth Krane, *Oregon State University*
Hadley Lawler, *Vanderbilt University*
Priscilla Laws, *Dickinson College*
Edbertho Leal, *Polytechnic University of Puerto Rico*
Vern Lindberg, *Rochester Institute of Technology*
Peter Loly, *University of Manitoba*
James MacLaren, *Tulane University*
Andreas Mandelis, *University of Toronto*
Robert R. Marchini, *Memphis State University*
Andrea Markelz, *University at Buffalo, SUNY*

Paul Marquard, *Caspar College*
David Marx, *Illinois State University*
Dan Mazilu, *Washington and Lee University*
James H. McGuire, *Tulane University*
David M. McKinstry, *Eastern Washington University*
Jordon Morelli, *Queen’s University*
Eugene Mosca, *United States Naval Academy*
Eric R. Murray, *Georgia Institute of Technology, School of Physics*
James Napolitano, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Blaine Norum, *University of Virginia*
Michael O’Shea, *Kansas State University*
Patrick Papin, *San Diego State University*
Kiumars Parvin, *San Jose State University*
Robert Pelcovits, *Brown University*
Oren P. Quist, *South Dakota State University*
Joe Redish, *University of Maryland*
Timothy M. Ritter, *University of North Carolina at Pembroke*
Dan Styer, *Oberlin College*
Frank Wang, *LaGuardia Community College*
Robert Webb, *Texas A&M University*
Suzanne Willis, *Northern Illinois University*
Shannon Willoughby, *Montana State University*

Równowaga i sprężystość

12.1. RÓWNOWAGA

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał . .

12.01 odróżnić ogólne pojęcie równowagi od pojęcia równowagi statycznej;

12.02 wymienić warunki równowagi statycznej;

Podstawowe fakty

- Ciało sztywne pozostające w spoczynku jest w równowadze statycznej. Dla takiego ciała suma wektorowa działających na nie sił zewnętrznych jest równa zeru:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga sił}).$$

Jeśli wszystkie siły działające na ciało leżą w płaszczyźnie xy , to powyższe równanie wektorowe jest równoważne dwóm równaniom dla składowych

$$F_{\text{wyp},x} = 0 \quad \text{i} \quad F_{\text{wyp},y} = 0 \quad (\text{równowaga sił}).$$

- Warunkiem równowagi statycznej jest też wymaganie, by suma wektorowa działających na ciało zewnętrznych momentów sił względem dowolnego punktu była równa zeru:

12.03 wyjaśnić, co to jest środek ciężkości i jak jest on związany ze środkiem masy;

12.04 obliczyć współrzędne środka ciężkości i środka masy dla danego układu cząstek.

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}).$$

Gdy wszystkie siły leżą w płaszczyźnie xy , wszystkie ich momenty są równoległe do osi z i warunek równowagi momentów sił jest równoważny jednemu równaniu dla składowych

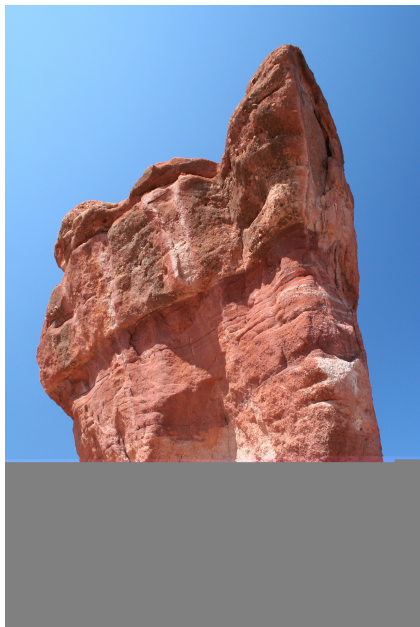
$$M_{\text{wyp},z} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}).$$

- Siła ciężkości działa z osobna na wszystkie elementy (atomy) ciała. Sumaryczne działanie tych sił jest równoważne przyłożeniu całkowitej siły ciężkości ciała $\vec{F}_g$ w punkcie, który nazywamy środkiem ciężkości tego ciała. Jeśli dla wszystkich elementów ciała przyspieszenie grawitacyjne $\vec{g}$ jest jednakowe, to środek ciężkości ciała i jego środek masy znajdują się w tym samym punkcie.

0 fizyce

Budowane przez ludzi konstrukcje powinny być stabilne mimo działania na nie różnych sił. Na przykład budynek musi być stabilny, mimo że działa na niego siła ciężkości i siły wiatru, a most musi być stabilny, mimo że działa na niego siła ciężkości oraz różne siły, jakim działają na most przejeżdżające po nim pojazdy.

Jednym z celów fizyki jest ustalenie warunków równowagi ciał, na które mogą działać różne siły. W tym rozdziale omówimy dwa główne aspekty stabilności ciał: *równowagę sił* i *momentów sił* działających na ciało sztywne oraz *sprężystość* ciał, które nie są sztywne i mogą podlegać odkształceniom. Gdy fizyka budowli jest poprawna, pisze się o tym w czasopismach z dziedziny fizyki i techniki, a gdy jest niepoprawna, pisze się o tym wielokrotnie w gazetach codziennych i czasopismach prawniczych.



Rys. 12.1. Blok skalny spoczywający w pozycji, która wydaje się bardzo niepewna, lecz w rzeczywistości jest stanem równowagi statycznej (fot. ksb/Shutterstock)

Równowaga

Rozważmy cztery ciała: 1) książkę leżącą na stole, 2) krążek hokejowy ślizgający się bez tarcia po lodzie ze stałą prędkością, 3) wirujące łopatki wentylatora oraz 4) koło roweru jadącego ze stałą prędkością po prostym torze. Dla każdego z nich:

1. Pęd środka masy $\vec{P}$ jest stały.
2. Moment pędu $\vec{L}$ względem środka masy (lub dowolnego innego punktu) też jest stały.

Mówimy, że ciała te są w **równowadze**. Warunki równowagi ciała są zatem następujące:

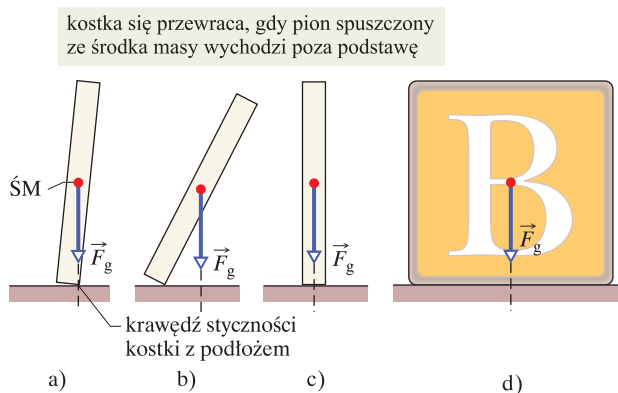
$$\vec{P} = \text{const} \quad \text{oraz} \quad \vec{L} = \text{const.} \quad (12.1)$$

W tym rozdziale będziemy się interesować sytuacjami, w których stałe w równaniu (11.1) są równe zero, tzn. przypadkami ciał nieporuszających się — ani ruchem postępowym, ani obrotowym — w układzie odniesienia, w którym je obserwujemy. Ciała takie znajdują się w **równowadze statycznej**. Z czterech ciał, które wymieniliśmy na początku paragrafu, tylko jedno — książka leżąca na stole — pozostaje w równowadze statycznej.

Blok skalny z rysunku 12.1 jest innym przykładem ciała znajdującego się — choć pewnie nie na zawsze — w równowadze statycznej. Właściwość tę ma też nieprzebrana mnogość innych ciał, takich jak katedry, domy, biurka czy kioski z gazetami, które nie zmieniają swego położenia z upływem czasu.

Jak wiemy z podrozdziału 8.3, jeśli ciało wytrącone ze stanu równowagi statycznej w wyniku działania na nie siły powraca potem do tego stanu równowagi, mówimy, że ciało jest w stanie *trwałej* równowagi statycznej. W takim stanie znajduje się na przykład kulka kamienna na dnie półkulistej misy. Jeśli natomiast nawet niewielka siła może na stałe wyprowadzić ciało ze stanu równowagi, to mówimy, że jest to stan *nietrwałej* równowagi statycznej.

Domino. Wyobraź sobie na przykład, że udało ci się ustawić kostkę domina tak, że jej środek ciężkości znajduje się dokładnie nad krawędzią, którą kostka styka się z podłożem, jak na rysunku 12.2a. Moment siły względem punktu styczności z podłożem, pochodzący od siły ciężkości $\vec{F}_g$ działającej na kostkę, jest równy zero, ponieważ siła działa wzdłuż prostej



Rys. 12.2. a) Kostka domina ustawiona na jednej z krawędzi tak, że jej środek ciężkości znajduje się dokładnie nad tą krawędzią. Działająca na kostkę siła ciężkości $\vec{F}_g$ skierowana jest wzdłuż prostej przechodzącej przez punkt styczności kostki z podłożem. b) Jeśli kostka obróci się choćby nieznacznie w prawo od położenia z rysunku (a), to moment siły $\vec{F}_g$ spowoduje dalszy obrót kostki. c) Kostka ustawiona prosto na jednej z węższych ścian jest w równowadze bardziej trwałej niż kostka z rysunku (a). d) Jeszcze bardziej trwała jest równowaga sześciennego klocka

przechodzącej przez ten punkt. Kostka znajduje się zatem w równowadze. Oczywiście najmniejsza nawet siła, mogąca pochodzić od jakiegokolwiek przypadkowego zaburzenia, wytrąci kostkę z tego stanu równowagi. Gdy tylko kierunek działania siły $\vec{F}_g$ przesunie się względem punktu styczności kostki z podłożem (jak np. na rys. 12.2b), moment siły $\vec{F}_g$ spowoduje obrót kostki. Stan równowagi z rysunku 12.2a jest zatem stanem nietrwałej równowagi statycznej.

Ustawienie kostki domina z rysunku 12.2c jest znacznie mniej nietrwałe. Aby przewrócić tę kostkę, trzeba przyłożyć do niej siłę, która zdoła obrócić ją wokół krawędzi aż do położenia z rysunku 12.2a, w którym środek masy znajduje się nad krawędzią styczności kostki z podłożem, a potem jeszcze trochę dalej. Niewielką siłą nie da się zatem przewrócić kostki, lecz silnym przytknięciem palcem w kostkę można to zrobić bez trudu (na pewno widziałeś, jak po ustawieniu długiego łańcucha pionowych kostek domina uderzenie palcem pierwszej z nich powoduje upadek całego łańcucha).

Klocek. Sześcienny klocek z rysunku 11.2d (np. klocek z dziecinnej układanki) jest w równowadze jeszcze bardziej trwałej, gdyż aby go przewrócić, trzeba doprowadzić do jeszcze znaczniejszego przemieszczenia środka masy, by wyprowadzić go poza krawędź styczności klocka z podłożem. Przytknięcie palcem może tu nie wystarczyć (dlatego właśnie nie widuje się przewracania łańcuchów sześciennych klocków). Robotnik z rysunku 12.3 ma w sobie coś z kostki domina i coś z sześciennego klocka: wzdłuż belki ma nogi szeroko rozstawione, a więc jego położenie jest dość trwałe, natomiast w poprzek belki ma podstawę wąską — w tym kierunku jego równowaga jest dość nietrwała, a zatem robotnik musi się bardzo strzec mocniejszych podmuchów wiatru.

Badanie warunków równowagi statycznej ma wielkie znaczenie w technice. Budowniczowie muszą umieć przewidzieć wszystkie zewnętrzne siły i momenty sił, jakie mogą działać na projektowaną konstrukcję, a następnie przez właściwy kształt obiektu i odpowiedni dobór materiałów użytych do jego budowy zapewnić trwałość konstrukcji w warunkach, gdyby te siły istotnie na nią działały. Chodzi na przykład o to, by budować mosty, które nie zarwą się ani pod wpływem ruchu pojazdów, ani pod wpływem wiejących wiatrów, lub o to, aby podwozie samolotu wytrzymało zderzenia z nie zawsze równą powierzchnią lądowiska.

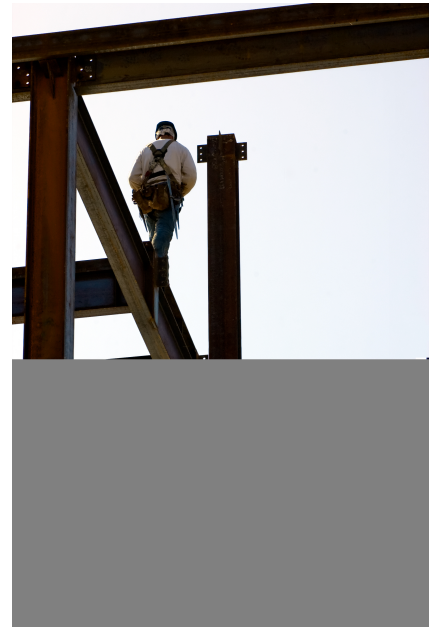
Warunki równowagi

Ruch postępowy ciała opisuje druga zasada dynamiki Newtona, którą możemy wyrazić za pomocą pędu ciała w postaci równania (9.27), czyli

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (12.2)$$

Jeśli ciało jest w równowadze ze względu na ruch postępowy, tzn. jeśli $\vec{P}$ jest stałe, to $d\vec{P}/dt = 0$, a zatem

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga sił}). \quad (12.3)$$



Rys. 12.3. Robotnik budowlany stojący na stalowej belce jest w równowadze statycznej, która jest bardziej trwała w kierunku wzdłuż belki niż w kierunku do niej prostopadłym (fot. Dwight Smith/Shutterstock)

Do opisu ruchu obrotowego ciała wykorzystamy z kolei drugą zasadę dynamiki wyrażoną w *wielkościach kątowych*, czyli równanie (11.29) mające postać

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (12.4)$$

Jeśli ciało jest w równowadze ze względu na ruch obrotowy, tzn. jeśli $\vec{L}$ jest stałe, to $d\vec{L}/dt = 0$, a zatem

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}). \quad (12.5)$$

Tak więc dwa warunki równowagi ciała są następujące:



1. Suma wektorowa wszystkich działających na ciało sił zewnętrznych musi być równa zeru.
2. Suma wektorowa wszystkich działających na ciało zewnętrznych momentów sił, mierzonych względem *dowolnego* punktu odniesienia, musi być równa zeru.

Warunki te są oczywiście spełnione, gdy ciało znajduje się w równowadze *statycznej*. Obowiązują one jednak również w bardziej ogólnej sytuacji, gdy wektory $\vec{P}$ i $\vec{L}$ są stałe, choć niekoniecznie równe zeru.

Równania (12.3) i (12.5) dotyczą wielkości wektorowych, a zatem są równoważne trzem niezależnym równaniom dla składowych wzdłuż każdej z osi układu współrzędnych:

Równowaga sił	Równowaga momentów sił	
$F_{\text{wyp},x} = 0,$	$M_{\text{wyp},x} = 0,$	
$F_{\text{wyp},y} = 0,$	$M_{\text{wyp},y} = 0,$	
$F_{\text{wyp},z} = 0,$	$M_{\text{wyp},z} = 0.$	(12.6)

Podstawowe równania. Uprościmy sobie sytuację i przyjmiemy, że wszystkie siły działają na ciało w płaszczyźnie xy . Oznacza to, że momenty wszystkich działających na ciało sił mogą powodować obrót ciała jedynie wokół osi równoległej do osi z . Wobec tego z zestawu równań (12.6) wypada nam jedno równanie dla składowych siły i dwa równania dla składowych momentu siły; zostają tylko równania:

$$F_{\text{wyp},x} = 0 \quad (\text{równowaga sił}), \quad (12.7)$$

$$F_{\text{wyp},y} = 0 \quad (\text{równowaga sił}), \quad (12.8)$$

$$M_{\text{wyp},z} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}), \quad (12.9)$$

przy czym $M_{\text{wyp},z}$ jest wypadkowym zewnętrznym momentem siły, powodującym obrót ciała wokół osi z lub wokół *dowolnej* osi do niej równoległej.

Dla krążka hokejowego ślizgającego się po lodzie ze stałą prędkością równania (12.7), (12.8) i (12.9) są spełnione, a zatem znajduje się on w równowadze, lecz *nie jest to równowaga statyczna*. Aby krążek znajdował

się w stanie równowagi statycznej, jego pęd $\vec{P}$ musi być nie tylko stały, lecz także równy zero — krążek musi pozostawać na lodzie w spoczynku. Mamy zatem jeszcze jeden warunek, który jest spełniony wtedy, gdy ciało znajduje się w stanie równowagi statycznej.

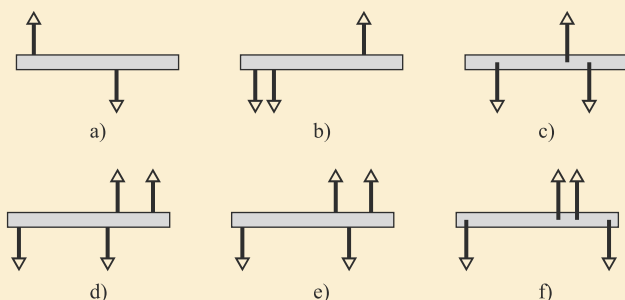


3. Pęd ciała $\vec{P}$ musi być równy zero.



Sprawdzian 1

Na rysunku przedstawiono — w sześciu przypadkach — widziany z góry jednorodny pręt, na który działa kilka sił — dwie lub więcej — w kierunkach do niego prostopadłych. W których przypadkach można tak dobrać wartości sił (przy czym każda z nich musi być różna od zera), by pręt znajdował się w równowadze statycznej?



Środek ciężkości

Siła ciężkości działająca na ciało rozciągnięte jest sumą wektorową sił działających na poszczególne elementy (atomy) ciała. Zamiast rozważać te pojedyncze składowe, możemy powiedzieć, że:



Siła ciężkości $\vec{F}_g$ działająca na ciało jest efektywnie przyłożona w punkcie, który nazywamy **środkiem ciężkości** (ŚC) tego ciała.

Słowo „efektywnie” oznacza, że siła wypadkowa oraz wypadkowy moment siły (względem dowolnego punktu) działające na to ciało nie uległyby zmianie, gdybyśmy w jakiś sposób potrafili „włączyć” siły działające na poszczególne elementy ciała, a „włączyć” siłę ciężkości $\vec{F}_g$ w środku ciężkości ciała.

Dotychczas zawsze przyjmowaliśmy, że siła ciężkości jest przyłożona do ciała w jego środku masy (ŚM). Jest to równoważne założeniu, że środek ciężkości ciała i jego środek masy są tym samym punktem. Przypomnij sobie, że siła ciężkości $\vec{F}_g$ działająca na ciało o masie M jest równa $M\vec{g}$, gdzie $\vec{g}$ jest przyspieszeniem, z jakim ciało spada swobodnie pod wpływem siły ciężkości. Udowodnimy za chwilę, że:



Jeśli dla wszystkich elementów ciała przyspieszenie $\vec{g}$ jest jednakowe, to środek ciężkości ciała i jego środek masy znajdują się w tym samym punkcie.

Stwierdzenie to jest w przybliżeniu prawdziwe dla ciał, z jakimi spotykamy się na co dzień, gdyż przyspieszenie $\vec{g}$ zmienia się bardzo niewiele wzdłuż powierzchni Ziemi oraz tylko nieznacznie maleje ze wzrostem wysokości nad Ziemią. Dla ciał, takich jak mysz czy łoś, możemy więc spokojnie zakładać, że siła ciężkości jest do nich przyłożona w ich środku masy. W dalszym rozważaniach będziemy to zakładać, a teraz przedstawimy dowód słuszności tego założenia.

Dowód

Rozważmy najpierw poszczególne elementy ciała. Na rysunku 12.4a przedstawiono ciało rozciągle o masie M oraz jeden z jego elementów o masie m_i . Siła ciężkości $\vec{F}_{gi}$ działająca na każdy z takich elementów jest równa $m_i \vec{g}_i$. Wskaźnik przy $\vec{g}_i$ oznacza, że jest to przyspieszenie grawitacyjne w miejscu, w którym znajduje się ten element (w przypadku ogólnym może ono być różne dla różnych elementów ciała).

W sytuacji z rysunku 12.4a z siłą $\vec{F}_{gi}$ działającą na odpowiedni element ciała związany jest moment siły M_i względem punktu O , przy czym ramię tej siły wynosi x_i . Korzystając z równania (10.41) ($M = r_{\perp} F$), moment M_i możemy zapisać jako

$$M_i = x_i F_{gi}. \quad (12.10)$$

Wypadkowy moment sił działających na wszystkie elementy ciała jest więc równy

$$M_{\text{wyp}} = \sum M_i = \sum x_i F_{gi}. \quad (12.11)$$

A teraz rozpatrzmy ciało jako całość. Na rysunku 12.4b przedstawiono siłę ciężkości przyłożoną do środka ciężkości ciała. Ma ona ramię $x_{\text{śC}}$ względem punktu O , a zatem jej moment M możemy zapisać, korzystając znów z równania (10.41), jako

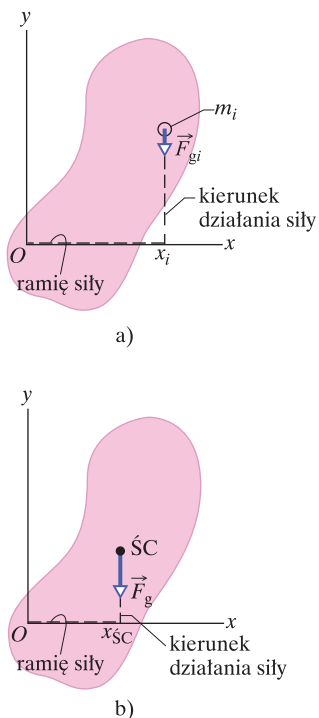
$$M = x_{\text{śC}} F_g. \quad (12.12)$$

Siła ciężkości $\vec{F}_g$ działająca na całe ciało jest równa sumie sił ciężkości $\vec{F}_{gi}$ działających na poszczególne jego elementy, zatem w równaniu (13.12) podstawiamy $\sum F_{gi}$ zamiast F_g i otrzymujemy

$$M = x_{\text{śC}} \sum F_{gi}. \quad (12.13)$$

Przypomnijmy sobie teraz, że moment siły związany z siłą $\vec{F}_g$ przyłożoną do ciała w jego środku ciężkości jest równy wypadkowemu momentowi siły pochodzącemu od sił $\vec{F}_{gi}$ działających na wszystkie elementy ciała (tak właśnie zdefiniowaliśmy środek ciężkości). Wobec tego moment siły M z równania (12.13) jest równy M_{wyp} z równania (12.11). Przyrównując do siebie prawe strony tych równań, dostajemy

$$x_{\text{śC}} \sum F_{gi} = \sum x_i F_{gi}.$$



Rys. 12.4. a) Element masy m_i ciała rozciąglego. Działająca na ten element siła ciężkości $\vec{F}_{gi}$ ma ramię x_i względem początku układu współrzędnych O . b) Siła ciężkości $\vec{F}_g$ działająca na całe ciało jest przyłożona w środku ciężkości ciała (śC). Ma ona ramię $x_{\text{śC}}$ względem początku układu współrzędnych O

Podstawiając $m_i g_i$ zamiast F_{gi} , otrzymujemy

$$x_{\text{ŚC}} \sum m_i g_i = \sum x_i m_i g_i. \quad (12.14)$$

A teraz rzecz najważniejsza: jeśli przyspieszenie g_i jest jednakowe w miejscach zajmowanych przez poszczególne elementy ciała, to g_i w tym równaniu skraca się i mamy

$$x_{\text{ŚC}} \sum m_i = \sum x_i m_i. \quad (12.15)$$

Suma $\sum m_i$ mas wszystkich elementów jest całkowitą masą ciała M . Równanie (12.15) możemy więc zapisać w postaci

$$x_{\text{ŚC}} = \frac{1}{M} \sum x_i m_i. \quad (12.16)$$

Prawa strona tego równania jest równa współrzędnej $x_{\text{ŚM}}$ środka masy ciała (patrz równanie (9.4)). Otrzymujemy zatem związek, który chcieliśmy wyprowadzić. Jeśli przyspieszenie grawitacyjne jest jednakowe w miejscach zajmowanych przez poszczególne elementy ciała, to środek ciężkości ciała i jego środek masy znajdują się w tym samym punkcie:

$$x_{\text{ŚC}} = x_{\text{ŚM}}. \quad (12.17)$$

12.2. KILKA PRZYKŁADÓW RÓWNOWAGI STATYCZNEJ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

12.05 zastosować warunki równowagi sił i momentów sił dla równowagi statycznej;

12.06 wyjaśnić, jak mądrze wybrać układ współrzędnych (względem początku którego będziemy obliczać momenty sił), aby uprościć obliczenia przez usunięcie z równania dla momentów sił jednej lub więcej sił nieznanymi.

Podstawowe fakty

• Ciało sztywne pozostające w spoczynku jest w równowadze statycznej. Dla takiego ciała suma wektorowa działających na nie sił zewnętrznych jest równa zeru:

$$\vec{F}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga sił}).$$

Jeśli wszystkie siły działające na ciało leżą w płaszczyźnie xy , to powyższe równanie wektorowe jest równoważne dwóm równaniom dla składowych

$$F_{\text{wyp},x} = 0 \quad \text{i} \quad F_{\text{wyp},y} = 0 \quad (\text{równowaga sił}).$$

• Warunkiem równowagi statycznej jest też wymaganie, by suma wektorowa działających na ciało zewnętrznych momentów sił względem dowolnego punktu była równa zeru:

$$\vec{M}_{\text{wyp}} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}).$$

Gdy wszystkie siły leżą w płaszczyźnie xy , wszystkie ich momenty są równoległe do osi z i warunek równowagi momentów sił jest równoważny jednemu równaniu dla składowych

$$M_{\text{wyp},z} = 0 \quad (\text{równowaga momentów sił}).$$

Kilka przykładów równowagi statycznej

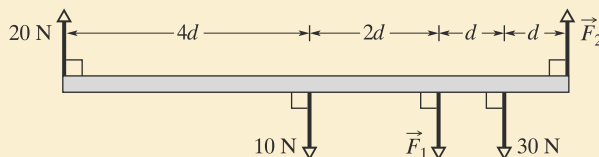
Rozważmy teraz kilka przykładów dotyczących równowagi statycznej ciał. W każdym z nich wybierzemy układ zawierający jedno lub więcej ciał, dla którego wykorzystamy warunki równowagi (tzn. wzory (12.7), (12.8) i (12.9)). We wszystkich przypadkach siły będą działać w płaszczyźnie xy , a zatem związane z nimi momenty sił będą równoległe do osi z . Wobec tego, korzystając z równania (12.9), czyli warunku równowagi momentów sił, będziemy obliczać momenty sił względem osi równoległej do

osi z . Choć równanie (12.9) jest słuszne dla *dowolnej* takiej osi, to — jak się przekonasz — właściwy wybór osi umożliwia łatwiejsze wykorzystanie warunku (13.2) dzięki eliminacji jednego lub więcej wyrazów.



Sprawdzian 2

Na rysunku przedstawiono widziany z góry jednorodny pręt znajdujący się w równowadze statycznej. a) Czy możesz wyznaczyć wartości nieznanymi sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ z warunku równowagi sił? b) Gdzie powinieneś umieścić oś obrotu, aby otrzymać równanie, w którym jedyną niewiadomą jest wartość siły $\vec{F}_2$? c) Okazuje się, że wartość siły $\vec{F}_2$ jest równa 65 N. Ile wynosi wartość siły $\vec{F}_1$?



Przykład 12.01. Równowaga poziomej belki

Jak pokazano na rysunku 12.5a, jednorodna belka o długości L i masie $m = 1,8$ kg znajduje się w spoczynku, a oba jej końce spoczywają na wagach. Na belce leży nieruchomo jednorodny klocek o masie $M = 2,7$ kg, tak że jego środek jest oddalony od lewego końca belki o $L/4$. Jakie są wskazania obu wag?

PODSTAWOWE FAKTY

Pierwszym krokiem prowadzącym do rozwiązania *każdego* zadania dotyczącego równowagi statycznej jest wybranie układu ciał, który będzie się rozważać, i sporządzenie dla tego układu diagramu sił zawierającego wszystkie siły działające na ten układ. W naszym zadaniu układ ten będzie się składał z belki i klocka. Diagram sił działających na ten układ przedstawiono na rysunku 12.5b. (Właściwy wybór układu ciał wymaga nieco doświadczenia; często istnieje kilka równie dobrych możliwości takiego wyboru). Rozwiązanie zadania opiera się na stwierdzeniu, że skoro układ znajduje się w stanie równowagi statycznej, to spełnione są dla niego warunki równowagi sił, tzn. równania (12.7) i (12.8), oraz równowagi momentów sił, tzn. równanie (12.9).

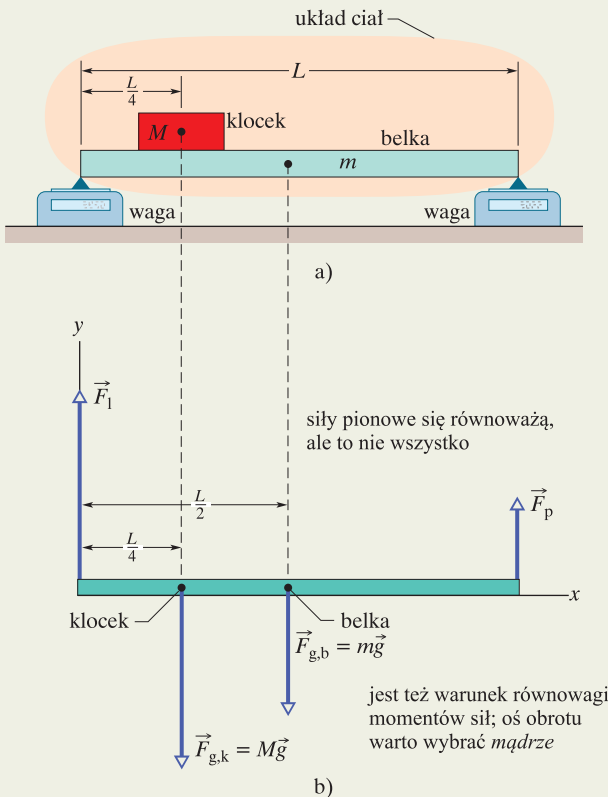
Obliczenia: Na belkę działają ze strony wag siły normalne: $\vec{F}_l$ na lewy koniec belki i $\vec{F}_p$ na jej prawy koniec. Szukane przez nas wskazania wag są równe wartościom bezwzględnych tych sił. Na belkę działa też siła

ciężkości $\vec{F}_{g,b}$, która jest do niej przyłożona w środku masy belki i jest równa $m\vec{g}$. Podobnie na klocek działa siła ciężkości $\vec{F}_{g,k}$ przyłożona w środku masy klocka i równa $M\vec{g}$. Dla uproszczenia rysunku 12.5b klocek zaznaczono na nim jako kropkę znajdującą się w obrębie belki, a koniec wektora $\vec{F}_{g,k}$ przesunięto do tej kropki. Można tak zrobić, ponieważ pionowe przesunięcie wektora $\vec{F}_{g,k}$ wzdłuż kierunku działania tej siły nie zmienia związanego z nią momentu siły względem dowolnej osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku.

Ponieważ działające na układ siły nie mają składowych wzdłuż osi x , więc równanie (12.7) ($F_{wyp,x} = 0$) nie zawiera w sobie żadnych informacji. Z równania dla składowych y (równanie (12.8): $F_{wyp,y} = 0$) otrzymujemy w naszym przypadku

$$F_l + F_p - Mg - mg = 0. \quad (12.18)$$

Równanie to zawiera dwie niewiadome: F_l i F_p , będzie więc nam również potrzebny warunek równowagi momentów sił, czyli równanie (12.9). Możemy je zapisać dla *dowolnej* osi obrotu prostopadłej do płaszczyzny rysunku 12.5. Wybierzmy oś przechodzącą przez lewy koniec belki. Musimy oczywiście pamiętać o regułach wyznaczania znaków momentów sił: jeśli moment siły powoduje obrót ciała, znajdującego się początkowo w spoczynku, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, to moment ten jest ujemny, a jeśli powoduje obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, to jest dodatni. Wartości bezwzględne momen-



Rys. 12.5. a) Belka o masie m podtrzymuje klocek o masie M .
b) Diagram sił działających na układ *belka + klocek*

tów zapiszemy w postaci $r_{\perp} F$. W naszym przypadku ramiona sił $r_{\perp}$ wynoszą: 0 dla $\vec{F}_1$, $L/4$ dla $M\vec{g}$, $L/2$ dla $m\vec{g}$ oraz L dla $\vec{F}_p$.



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 12.02. Równowaga ukośnego wysięgnika

Rysunek 12.6a przedstawia szafę pancerną o masie $M = 430$ kg zwisającą na sznurze z wysięgnika o wymiarach $a = 1,9$ m i $b = 2,5$ m. Wysięgnik składa się z belki na zawiasie oraz poziomej linii łączącej belkę ze ścianą. Jednorodna belka ma masę m równą 85 kg; masę sznura i liny można pominąć.

a) Ile wynosi napięcie liny T_1 ? Innymi słowy, ile wynosi wartość siły $\vec{T}_1$, jaką lina działa na belkę?

PODSTAWOWE FAKTY

Rozważanym układem ciał jest tu sama belka; diagram sił działających na belkę przedstawiono na rysunku

Warunek równowagi momentów sił ($M_{\text{wyp},z} = 0$) jest zatem następujący:

$$(0)(F_1) - (L/4)(Mg) - (L/2)(mg) + (L)(F_p) = 0,$$

skąd otrzymujemy

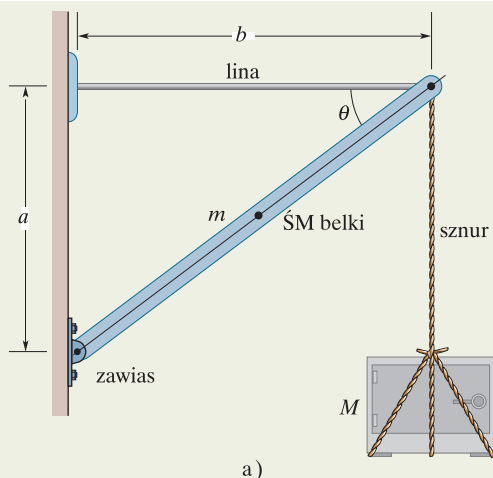
$$\begin{aligned} F_p &= \frac{1}{4}Mg + \frac{1}{2}mg \\ &= \frac{1}{4}(2,7 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) + \frac{1}{2}(1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 15,44 \text{ N} \approx 15 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}). \end{aligned}$$

Rozwiązując następnie równanie (12.18) względem F_1 i podstawiając do niego powyższy wynik, dostajemy

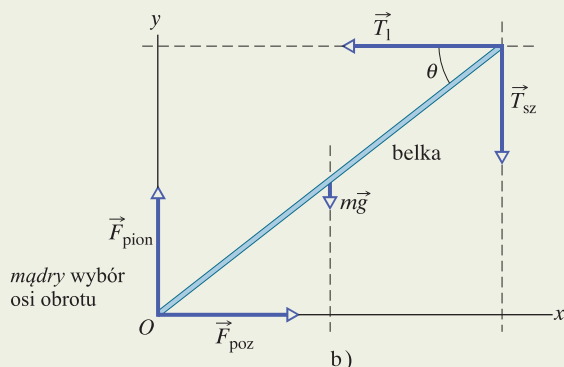
$$\begin{aligned} F_1 &= (M + m)g - F_p \\ &= (2,7 \text{ kg} + 1,8 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) - 15,44 \text{ N} \\ &= 28,66 \text{ N} \approx 29 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}). \end{aligned}$$

Uwaga na temat metody rozwiązania: Zapisując warunek równowagi sił, otrzymaliśmy równanie z dwiema niewiadanymi. Warunek równowagi momentów sił względem dowolnej osi dałby nam również równanie z dwiema niewiadanymi. Aby ułatwić sobie pracę, wybraliśmy jednak oś obrotu tak, by przechodziła przez punkt przyłożenia jednej z nieznanymi sił, w tym przypadku F_1 , dzięki czemu siła ta nie wystąpiła w równaniu dla równowagi momentów sił. Taki wybór osi obrotu umożliwił nam otrzymanie równania z jedną niewiadomą, z którego łatwo było wyznaczyć wartość nieznaną siły F_p . Podstawiając otrzymany wynik do warunku równowagi sił, obliczyliśmy następnie wartość drugiej nieznaną siły.

12.6b. Ze strony liny działa na belkę siła $\vec{T}_1$. Siła ciężkości działa na belkę w jej środku masy (czyli w jej środku geometrycznym) i jest równa $m\vec{g}$. Składową pionową siły, jaką działa na belkę zawias, oznaczono przez $\vec{F}_{\text{pion}}$, a składową poziomą tej siły — przez $\vec{F}_{\text{poz}}$. Ze strony podtrzymującego szafę pancerną sznura działa na belkę siła $\vec{T}_{\text{sz}}$. Ponieważ belka, sznur i szafa pozostają w spoczynku, wartość siły $\vec{T}_{\text{sz}}$ jest równa ciężarowi szafy $T_{\text{sz}} = Mg$. Początek O układu współrzędnych xy umieszczono w punkcie, w którym znajduje się zawias. Belka znajduje się w równowadze statycznej, a zatem spełnione są warunki równowagi sił i momentów sił.



a)



b)

Rys. 12.6. a) Ciężka szafa pancerna jest zawieszona na wyciągu złożonym z poziomej linii stalowej i jednorodnej belki. b) Diagram sił działających na belkę

Obliczenia: Skorzystajmy najpierw z równania (12.9) ($M_{\text{wyp},z} = 0$). Zwróćmy uwagę, że mamy wyznaczyć wartość siły $\vec{T}_1$, natomiast nie interesują nas wartości sił $\vec{F}_{\text{poz}}$ i $\vec{F}_{\text{pion}}$ działających na belkę ze strony zawiasu, czyli przyłożonych w punkcie O . Wobec tego oś obrotu, względem której będziemy obliczać momenty sił, warto wybrać tak, by w otrzymanym równaniu nie występowały siły $\vec{F}_{\text{poz}}$ i $\vec{F}_{\text{pion}}$, czyli wybrać oś prostopadłą do płaszczyzny rysunku w punkcie O . Ramiona sił $\vec{F}_{\text{poz}}$ i $\vec{F}_{\text{pion}}$ względem punktu O są równe zero. Proste, wzdłuż których działają siły $\vec{T}_1$, $\vec{T}_{sz}$ i $m\vec{g}$, zaznaczono na rysunku 12.6b za pomocą linii przerywanych. Ramiona tych sił względem punktu O wynoszą odpowiednio a , b i $b/2$.

Zapisując momenty sił w postaci $r_{\perp}F$ i korzystając ze znanych reguł dotyczących znaków momentów

sił, otrzymujemy warunek równowagi momentów sił $M_{\text{wyp},z} = 0$ w postaci

$$(a)(T_1) - (b)(T_{sz}) - (\frac{1}{2}b)(mg) = 0. \quad (12.19)$$

Podstawiając Mg zamiast T_{sz} i rozwiązując otrzymane równanie względem T_1 , dostajemy

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{gb(M + \frac{1}{2}m)}{a} \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(2,5 \text{ m})(430 \text{ kg} + 85/2 \text{ kg})}{1,9 \text{ m}} \\ &= 6093 \text{ N} \approx 6100 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}). \end{aligned}$$

b) Wyznacz wartość F siły wypadkowej działającej na belkę ze strony zawiasu.

PODSTAWOWE FAKTY

Obecnie chcemy wyznaczyć wartości składowej poziomej F_{poz} i składowej pionowej F_{pion} , by na tej podstawie obliczyć F . Zauważmy, że ponieważ znamy już wartość T_1 , możemy teraz skorzystać z warunku równowagi sił działających na belkę.

Obliczenia: Równanie dla składowych poziomych $F_{\text{wyp},x} = 0$ przybiera w naszym przypadku postać

$$F_{\text{poz}} - T_1 = 0, \quad (12.20)$$

skąd otrzymujemy

$$F_{\text{poz}} = T_1 = 6093 \text{ N}.$$

Równanie dla składowych pionowych $F_{\text{wyp},y} = 0$ ma postać

$$F_{\text{pion}} - mg - T_{sz} = 0.$$

Podstawiając Mg zamiast T_{sz} i rozwiązując otrzymane równanie względem F_{pion} , dostajemy

$$\begin{aligned} F_{\text{pion}} &= (m + M)g = (85 \text{ kg} + 430 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 5047 \text{ N}. \end{aligned}$$

Wartość siły wypadkowej obliczamy z twierdzenia Pitagorasa:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_{\text{poz}}^2 + F_{\text{pion}}^2} = \sqrt{(6093 \text{ N})^2 + (5047 \text{ N})^2} \\ &\approx 7900 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}). \end{aligned}$$

Zauważ, że otrzymana wartość F jest wyraźnie większa zarówno od sumy ciężarów szafy pancernej i belki, wynoszącej 5000 N, jak i od naprężenia poziomej linii, równego 6100 N.

Przykład 12.03. Równowaga strażaka na drabinie

Jak pokazano na rysunku 12.7a, drabina o długości $L = 12\text{ m}$ i masie $m = 45\text{ kg}$ opiera się o gładką ścianę (między ścianą a drabiną nie działa siła tarcia). Górny koniec drabiny jest oparty o ścianę na wysokości $h = 9,3\text{ m}$ nad podłożem, o które opiera się dolny koniec drabiny (między podłożem a drabiną działa siła tarcia). Środek masy drabiny znajduje się w odległości $L/3$ od jej dolnego końca. Wspinający się po drabinie strażak o masie $M = 72\text{ kg}$ znajduje się w pewnej chwili na takiej wysokości, że jego środek masy jest odległy od dolnego końca drabiny o $L/2$. Ile wynoszą wartości sił działających wówczas na drabinę ze strony ściany i podłoża?

PODSTAWOWE FAKTY

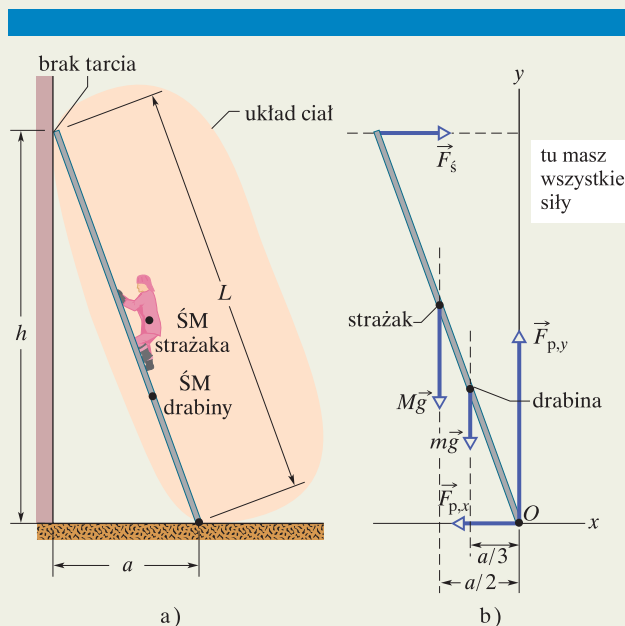
Przede wszystkim decydujemy, że rozważany układ ciał będzie się składał ze strażaka oraz drabiny, i sporządzamy diagram sił działających na ten układ, przedstawiony na rysunku 12.7b. Skoro układ znajduje się w równowadze statycznej, to spełnione są warunki równowagi sił i momentów sił, czyli równania od (12.7) do (12.9).

Obliczenia: Na rysunku 12.7b strażaka przedstawiliśmy za pomocą kropki na drabinie, zakładając, że jego środek masy znajduje się blisko drabiny, a działającą na niego siłę ciężkości zapisaliśmy jako $M\vec{g}$.

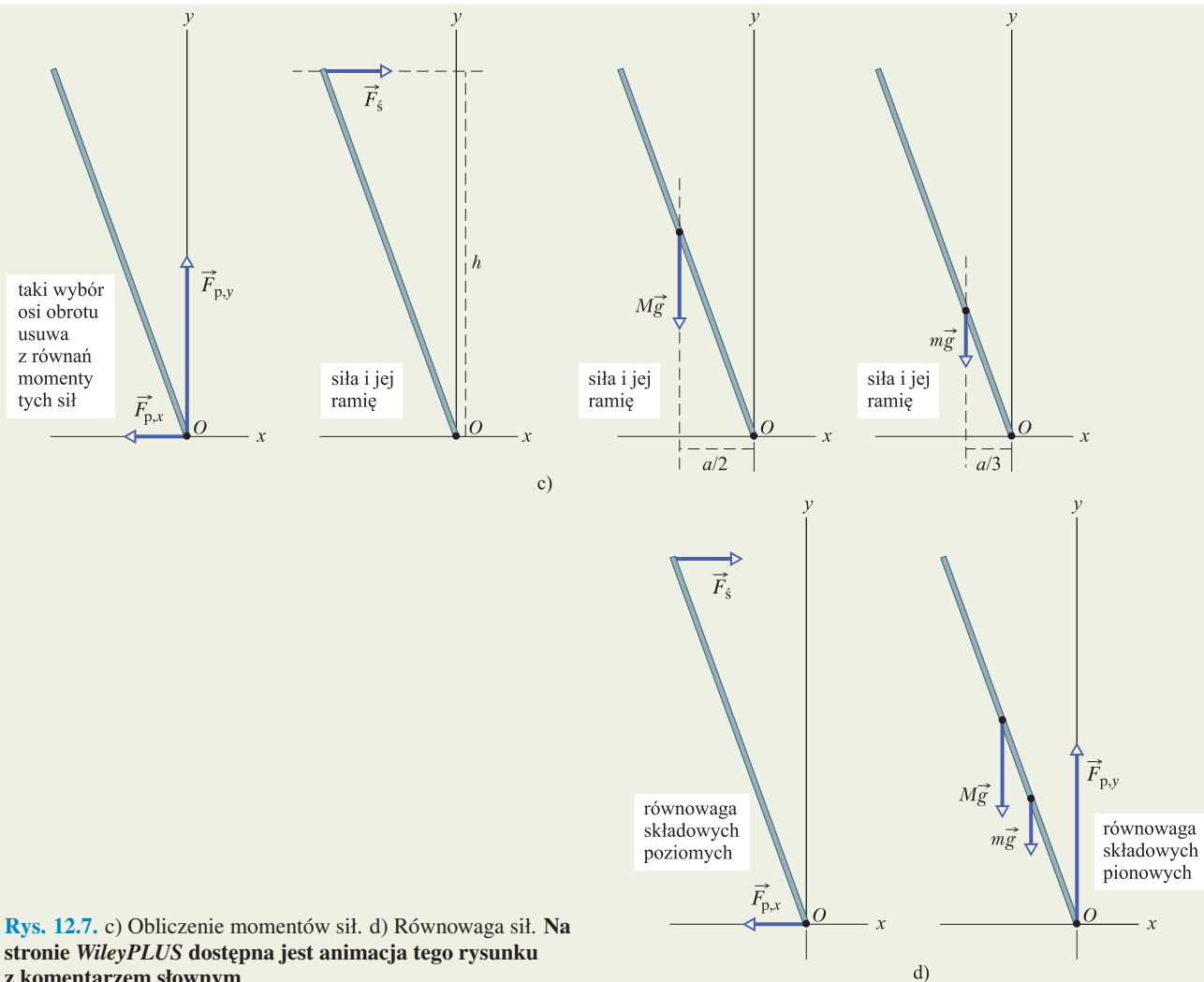
Jedyną siłą działającą na drabinę ze strony ściany jest pozioma siła $\vec{F}_s$ (gdyż między drabiną a ścianą nie działa tarcie). Siła działająca na drabinę ze strony podłoża $\vec{F}_p$ ma składową poziomą $\vec{F}_{p,x}$, którą jest siła tarcia statycznego, oraz składową pionową $\vec{F}_{p,y}$, którą jest siła normalna.

Skorzystajmy najpierw z równania (12.9) ($M_{\text{wyp},z} = 0$). Aby wybrać oś obrotu, względem której będziemy obliczać momenty sił, zauważmy, że mamy dwie nieznanne siły: $\vec{F}_s$ i $\vec{F}_p$, działające na dwa końce drabiny. Jeśli chcemy otrzymać równanie niezawierające jednej z nich, na przykład $\vec{F}_p$, musimy umieścić oś obrotu (prostopadłą do płaszczyzny rysunku, patrz rys. 12.7b) w punkcie przyłożenia tej siły, a zatem w punkcie O . Punkt ten wybieramy również jako początek układu współrzędnych xy . Momenty sił względem punktu O możemy wyznaczyć z każdego z równań od (10.39) do (10.41); najwygodniej nam będzie skorzystać z równania (10.41) ($M = r_{\perp} F$). Mądry wybór początku układu współrzędnych może bardzo ułatwić obliczenia momentów sił.

Aby wyznaczyć ramię siły $\vec{F}_s$, rysujemy prostą, na której leży ten wektor (jest to pozioma linia przerywana na rys. 12.7c). Ramie $r_{\perp}$ jest to odległość punktu O od tej prostej. Jak widać z rysunku 12.7c, odmierzamy ją wzdłuż osi y i otrzymujemy h . Podobnie postępujemy



Rys. 12.7. a) Strażak wspinający się po drabinie opartej o gładką ścianę i o szorstkie podłoże znajduje się w połowie wysokości drabiny. b) Diagram sił działających na układ strażak–drabina. Początek układu współrzędnych O wybrano w punkcie, w którym przyłożona jest jedna z nieznananych sił $\vec{F}_p$ (na rysunku pokazano składowe tej siły $\vec{F}_{p,x}$ i $\vec{F}_{p,y}$).



Rys. 12.7. c) Obliczenie momentów sił. d) Równowaga sił. Na stronie WileyPLUS dostępna jest animacja tego rysunku z komentarzem słownym

z siłami $M\vec{g}$ i $m\vec{g}$: rysujemy proste, wzdłuż których one działają, i spostrzegamy, że ich ramiona musimy zmierzyć wzdłuż osi x . Korzystając z wprowadzonej na rysunku 12.7a odległości a , stwierdzamy, że ramiona tych sił wynoszą odpowiednio $a/2$ (strażak jest w połowie wysokości drabiny) i $a/3$ (środek masy drabiny znajduje się w jednej trzeciej jej długości, licząc od dolnego końca). Ramiona sił $\vec{F}_{p,x}$ i $\vec{F}_{p,y}$ są równe zero, bo siły te są przyłożone w początku układu.

Warunek równowagi momentów sił $M_{wyp,z} = 0$, zapisany za pomocą wyrażeń typu $r_{\perp}F$, przybiera zatem postać

$$-(h)(F_s) + (a/2)(Mg) + (a/3)(mg) + (0)(F_{p,x}) + (0)(F_{p,y}) = 0 \quad (12.21)$$

(przy czym skorzystaliśmy ze znanej już nam reguły, mówiącej, że momenty sił są dodatnie, jeśli powodują obroty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a ujemne — jeśli powodują obroty w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara).

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy, że

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = 7,58 \text{ m}.$$

Wobec tego z równania (13.18) dostajemy

$$\begin{aligned} F_s &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(7,58 \text{ m})(72/2 \text{ kg} + 45/3 \text{ kg})}{9,3 \text{ m}} \\ &= 407 \text{ N} \approx 410 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}). \end{aligned}$$

Następnie skorzystamy z warunku równowagi sił i rysunku 12.7d. Równanie $F_{\text{wyp},x} = 0$ daje

$$F_{\xi} - F_{p,x} = 0,$$

skąd wynika, że

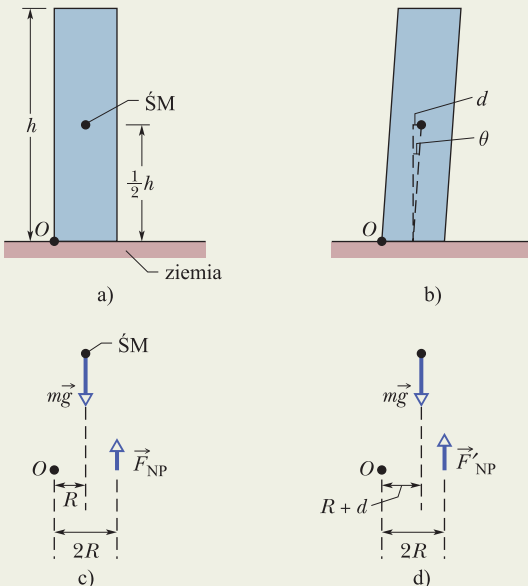
$$F_{p,x} = F_{\xi} = 410 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}).$$



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie *WileyPLUS*.

Przykład 12.04. Równowaga Krzywej Wieży w Pizie

Przyjmijmy dla uproszczenia, że Krzywa Wieża w Pizie jest jednorodnym cylindrem (wydrążonym walcem) o promieniu $R = 9,8 \text{ m}$ i wysokości $h = 60 \text{ m}$. Jej środek masy znajduje się na jej osi symetrii, na wysokości $h/2$. Na rysunku 12.8a przedstawiono cylinder stojący prosto, a na rysunku 12.8b jest on pochylony w prawo (w stronę południowej ściany wieży) pod kątem $\theta = 5,5^\circ$, w wyniku czego środek masy jest przesunięty o d . Załóżmy, że podłoże działa na wieżę tylko dwiema siłami: na lewą (północną) ścianę wieży działa siła normalna $\vec{F}_{\text{NL}}$, a na jej ścianę prawą (południową) — siła normalna $\vec{F}_{\text{NP}}$. Wyznacz procentową zmianę wartości siły $\vec{F}_{\text{NP}}$ w wyniku pochylenia się wieży.



Rys. 12.8. Cylinder jako model Krzywej Wieży w Pizie: a) prosty i b) pochylony tak, że jego środek ciężkości jest przesunięty w prawo. Siły i ich ramiona potrzebne do wyznaczenia momentów sił względem punktu O dla cylindra: c) prostego i d) pochylonego

Równanie $F_{\text{wyp},y} = 0$ ma w naszym przypadku postać

$$F_{p,y} - Mg - mg = 0,$$

skąd dostajemy ostatecznie

$$\begin{aligned} F_{p,y} &= (M + m)g = (72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) \\ &= 1146,6 \text{ N} \approx 1100 \text{ N} \quad (\text{odpowiedź}). \end{aligned}$$

PODSTAWOWE FAKTY

Wieża ciągle stoi, więc jest w równowadze, wobec czego musi być spełniony warunek równowagi momentów sił.

Obliczenia: Chcemy obliczyć wartość siły działającej na prawą ścianę wieży, a siły działającej na jej ścianę lewą nie znamy (ani znać nie chcemy), wybierzmy więc punkt, względem którego wyznaczmy momenty sił, u podstawy ściany lewej (punkt O na rysunku). Na rysunku 12.8c zaznaczono siły działające na wieżę prostą. Siła ciężkości $m\vec{g}$ działa pionowo w dół w środku masy wieży i ma ramię R względem punktu O . Moment tej siły dąży do obrotu wieży w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara, a więc jest ujemny. Działająca na prawą ścianę wieży siła normalna $\vec{F}_{\text{NP}}$ działa również w pionie (w górę), a jej ramię wynosi $2R$. Moment tej siły dąży do obrotu wieży w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, a więc jest dodatni. Warunek równowagi momentów sił ($M_{\text{wyp},z} = 0$) ma zatem postać

$$-(R)(mg) + (2R)(F_{\text{NP}}) = 0,$$

skąd wynika, że

$$F_{\text{NP}} = \frac{1}{2}mg.$$

Powinniśmy przewidzieć taki wynik: gdy środek masy leży na osi cylindra (a cylinder jest prosty), prawa ściana wieży podtrzymuje połowę jej masy.

Na rysunku 12.8b, odnoszącym się do wieży pochylonej, środek masy jest przesunięty w prawo o

$$d = \frac{1}{2}h \tan \theta.$$

Warunek równowagi momentów sił działających na wieżę pochyloną różni się od poprzedniego tym, że ramię siły ciężkości wynosi teraz $R + d$, a działająca na prawą ścianę wieży siła normalna ma inną wartość,

którą oznaczamy przez F'_{NP} (patrz rysunek 12.8d). Ten warunek ma więc postać

$$-(R + d)(mg) + (2R)(F'_{\text{NP}}) = 0,$$

skąd wynika, że

$$F'_{\text{NP}} = \frac{R + d}{2R} mg.$$

Dzieląc przez siebie wartości działającej na prawą ścianę wieży siły normalnej, otrzymane dla wieży prostej i pochylonej, otrzymujemy

$$\frac{F'_{\text{NP}}}{F_{\text{NP}}} = \frac{R + d}{R} = 1 + \frac{d}{R} = 1 + \frac{1}{2} h \operatorname{tg} \theta.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych danych ($h =$

60 m, $R = 9,8$ m i $\theta = 5,5^\circ$) dostajemy ostatecznie

$$\frac{F'_{\text{NP}}}{F_{\text{NP}}} = 1,29.$$

Widzimy, że nasz prosty model przewiduje, że nawet przy niewielkim pochyleniu wieży siła normalna, która działa na południową ścianę wieży, wzrasta o około 30%. Jednym z niebezpieczeństw, jakie grożą wieży, jest możliwość odkształcenia południowej ściany wieży i jej rozpadu. Przyczyną pochylenia się wieży jest osunięcie się gruntu pod wieżą, coraz większe po kolejnych deszczach. Ostatnio specjalistom udało się ustabilizować wieżę i częściowo zmniejszyć jej pochylenie przez budowę układu odprowadzania wody.



Dalsze przykłady, filmy i ćwiczenia na stronie WileyPLUS.

12.3. SPRĘŻYSTOŚĆ

Czego się nauczysz?

Po przestudiowaniu tego podrozdziału będziesz umiał...

- 12.07** wyjaśnić, co to jest zagadnienie nieoznaczone;
- 12.08** zastosować równanie wiążące naprężenie z odkształceniem i modułem Younga w przypadku rozciągania i ściskania ciała;
- 12.09** wyjaśnić różnicę między granicą sprężystości a naprężeniem niszczącym;

- 12.10** zastosować równanie wiążące naprężenie z odkształceniem i modułem ścinania w przypadku naprężeń ścinających;
- 12.11** zastosować równanie wiążące ciśnienie z odkształceniem i modułem sprężystości objętościowej w przypadku naprężeń objętościowych.

Podstawowe fakty

• Do opisu właściwości sprężystych (odkształceń) ciał pod wpływem działających na nie sił stosuje się trzy moduły sprężystości. Odkształcenie (na przykład względna zmiana długości) jest proporcjonalne do naprężenia (czyli siły odkształcającej ciało, przypadającej na jednostkę pola powierzchni) zgodnie z ogólną zależnością

naprężenie = (moduł sprężystości) · (odkształcenie).

- W przypadku rozciągania i ściskania ciał zależność ta ma postać

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta L}{L},$$

gdzie $\Delta L/L$ jest względną zmianą długości próbki, F — wartością siły $\vec{F}$ powodującej odkształcenie ciała, S — polem przekroju próbki prostopadłego do kierunku działania siły, a E — modułem Younga materiału. Naprężenie jest równe F/S .

- W przypadku naprężenia ścinającego zależność odkształcenia i naprężenia ma postać

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{L},$$

gdzie $\Delta x/L$ jest miarą odkształcenia ścinającego ciała, Δx jest przemieszczeniem jednego końca ciała w kierunku działania siły $\vec{F}$ powodującej odkształcenie ciała, a G — modułem ścinania materiału. Naprężenie jest równe F/S .

- W przypadku naprężenia objętościowego, gdy naprężenie pochodzi od otaczającej ciało cieczy, zależność odkształcenia i naprężenia ma postać

$$p = K \frac{\Delta V}{V},$$

gdzie p jest ciśnieniem, czyli naprężeniem objętościowym (hydrostatycznym), $\Delta V/V$ — wartością bezwzględną względnej zmiany objętości ciała pod wpływem działającego na nie ciśnienia, a K — modułem sprężystości objętościowej (modułem ściśliwości) materiału.

Układy nieoznaczone

Rozwiązując zadania w tym rozdziale, korzystamy z trzech niezależnych równań, którymi są zwykle dwa warunki równowagi sił i jeden warunek równowagi momentów sił względem wybranej osi obrotu. Gdyby zadanie zawierało więcej niż trzy niewiadome, nie moglibyśmy go rozwiązać.

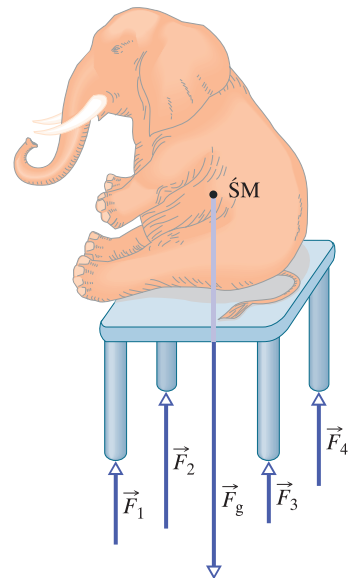
Rozważmy samochód, który jest nierównomiernie obciążony. Jakie siły — a każda z nich jest inna — działają na jego cztery opony? Na to pytanie nie potrafimy odpowiedzieć, gdyż możemy skorzystać tylko z trzech niezależnych równań. Z tego samego powodu możemy zbadać równowagę stołu o trzech nogach, ale stołu o czterech nogach — już nie. Zagadnienia tego rodzaju, w których mamy więcej niewiadomych niż równań, noszą nazwę **nieoznaczonych**.

Niemniej jednak takie zagadnienia nieoznaczone mają rozwiązania w świecie rzeczywistym. Jeśli ustawisz samochód tak, że każde z jego kół będzie wsparte na wadze, będziesz mógł odczytać wskazania tych wag, a ich suma będzie równa ciężarowi pojazdu. Dlaczego zatem nie potrafimy rozwiązać tego zagadnienia przy użyciu naszych równań? Czego nie umiemy w nich uwzględnić?

Rzecz w tym, że cały czas zakładaliśmy — choć może nie podkreślaliśmy tego zbyt silnie — że ciała, których równowagę statyczną badamy, są doskonale sztywne. Rozumiemy przez to, że nie ulegają one odkształceniom pod wpływem przyłożonych do nich sił. Ściśle rzecz biorąc, takich ciał w ogóle nie ma. Na przykład opony samochodu bardzo łatwo odkształcają się pod obciążeniem i samochód przyjmuje położenie równowagi statycznej.

Każdy z nas zetknął się z kiwającym się stolikiem w restauracji — zwykle rozwiązujemy ten problem, podkładając pod jedną z jego nóg złożoną kartkę papieru. Gdyby jednak na takim stoliku posadzić dostatecznie dużego słonia, to — o ile tylko stół wytrzymałby to obciążenie — z pewnością stół odkształciłby się dokładnie tak samo jak opony samochodu. Wszystkie nogi dotykałyby podłogi, na każdą z nich działałaby dobrze określona (różna od innych) siła, jak na rysunku 12.9, i stół by się nie kiwał (oczywiście, właściciel restauracji szybko by nas — i słonia — wyrzucił z lokalu na ulicę). Jak moglibyśmy teoretycznie wyznaczyć wartości sił działających na poszczególne nogi stolika?

Aby móc analizować takie układy nieoznaczone, musimy — oprócz warunków równowagi statycznej — wykorzystać wiedzę z zakresu *teorii sprężystości*, działu fizyki i techniki, który dotyczy opisu odkształceń ciał rzeczywistych pod wpływem działających na nie sił.

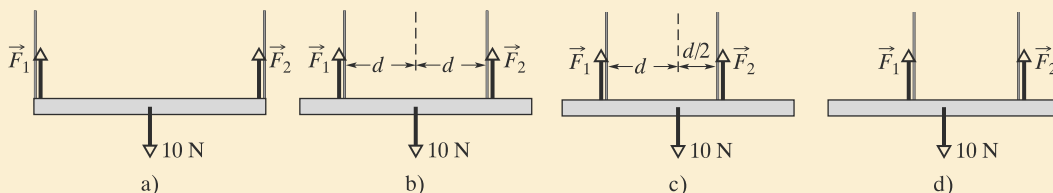


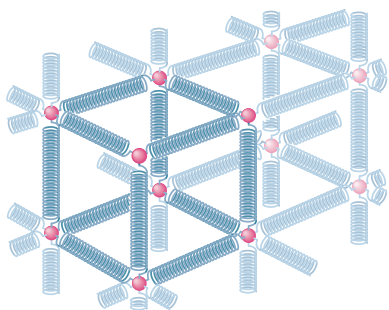
Rys. 12.9. Stół o czterech nogach jest przykładem układu nieoznaczonego. Siły działające na poszczególne nogi mają różne wartości, których nie można wyznaczyć, korzystając wyłącznie z warunków równowagi statycznej



Sprawdzian 3

Jednorodny pręt o ciężarze 10 N jest zawieszony poziomo pod sufitem na dwóch linkach, które działają na pręt skierowanymi do góry siłami F_1 i F_2 . Na rysunkach przedstawiono cztery przypadki, w których linki przymocowane są do pręta w różnych miejscach. Czy któreś z tych przypadków, a jeśli tak, to które, odnoszą się do układów nieoznaczonych, tzn. takich, że nie możemy wyznaczyć wartości sił F_1 i F_2 ?





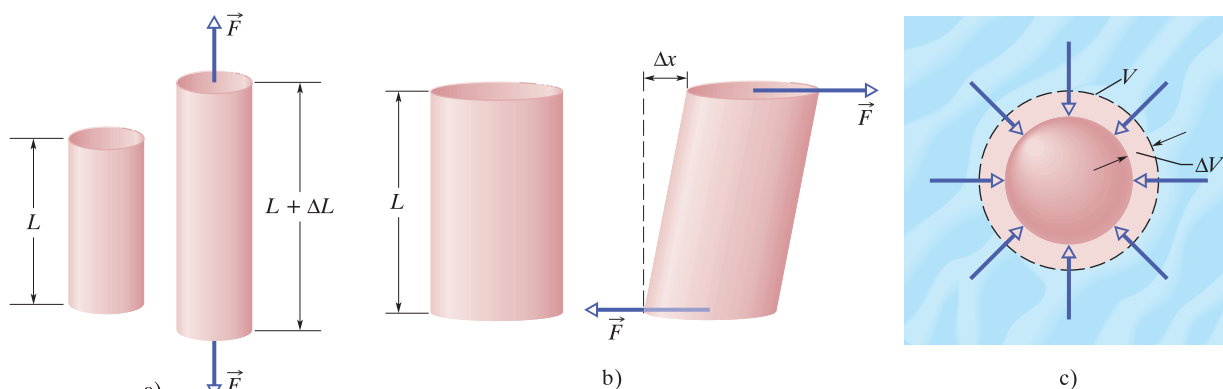
Rys. 12.10. Atomy metalicznego ciała stałego są regularnie ułożone w trójwymiarowej sieci. Sprężynki symbolizują siły działające między atomami

Sprężystość

Gdy duża liczba atomów znajduje się bardzo blisko siebie, tworząc metaliczne ciało stałe, na przykład żelazny gwóźdź, atomy zajmują położenia równowagi w trójwymiarowej *sieci*, tzn. regularnym układzie powtarzających się położeń, w których każdy atom ma dobrze określoną odległość od swych najbliższych sąsiadów. Atomy znajdują się blisko siebie dzięki siłom międzyatomowym, jakie między nimi występują. Działają one tak, jak gdyby atomy połączone były małymi sprężynkami, jak na rysunku 12.10. Sieć jest niezwykle sztywna, co oznacza, że te „międzyatomowe sprężynki” są bardzo mocne. Właśnie dlatego odnosimy wrażenie, że różne spotykane na co dzień przedmioty, jak metalowe drabiny, stoły czy łyżki są doskonale sztywne. Oczywiście znamy też przedmioty, takie jak węże ogrodowe czy gumowe rękawiczki, które bynajmniej nie wydają nam się sztywne. Atomy, z których złożone są te przedmioty, *nie tworzą* bowiem sztywnej sieci, jak na rysunku 12.10, lecz układają się w długie, elastyczne łańcuchy cząsteczek, a każdy z tych łańcuchów jest dość luźno związany z sąsiednimi.

Wszystkie rzeczywiste ciała „sztywne” są w jakimś stopniu **sprężyste**, co oznacza, że można nieznacznie zmienić ich rozmiary, rozciągając je, ściskając lub skręcając. Pewne pojęcie o wielkości tych zjawisk możesz uzyskać, rozważając taki przykład. Wyobraź sobie, że stalowy pręt o długości 1 m i średnicy 1 cm jest umocowany do stropu hali, w której produkuje się samochody. Jeśli zawieszisz na dolnym końcu tego pręta niewielki samochód, to pręt się rozciągnie, ale tylko o około 0,5 mm, czyli 0,05% swej długości. Co więcej, pręt powróci do swej pierwotnej długości, gdy samochód usuniesz.

Gdy jednak zawieszisz na tym pręcie dwa samochody, zostanie on odkształcony trwale, to znaczy nie przyjmie swej pierwotnej długości po usunięciu obciążenia. Jeśli zaś zawieszisz na nim trzy samochody, to pręt się przerwie. Tuż przed zerwaniem pręt będzie rozciągnięty, lecz tylko o niecałe 0,2%. Odkształcenie to możesz uznać za niezbyt wielkie, lecz jest ono bardzo ważne w zastosowaniach technicznych (zgodzisz się, że jest ważne, by skrzydło samolotu nie oderwało się od kadłuba pod obciążeniem).



Rys. 12.11. a) Walec poddany *naprężeniu rozciągającemu* wydłuża się o ΔL . b) Walec poddany *naprężeniu ścinającemu* odkształca się o Δx , podobnie do zginanej talii kart lub książki. c) Ciało stałe w kształcie kuli jest poddane *naprężeniu objętościowemu* ze strony cieczy, przy czym zmniejsza swą objętość o ΔV . Wielkość wszystkich tych odkształceń jest na rysunku znacznie przesadzona

Trzy sposoby. Na rysunku 12.11 przedstawiono trzy sposoby, na jakie ciało stałe może zmieniać swoje rozmiary pod wpływem działających na nie sił. Na rysunku 12.11a walec jest rozciągany. Na rysunku 12.11b walec jest odkształcany siłą prostopadłą do jego osi, podobnie jak możemy zgiąć talię kart lub książkę. Na rysunku 12.11c ciało stałe jest umieszczone w cieczy pod dużym ciśnieniem i jest ściskane równomiernie ze wszystkich stron. Wspólną cechą tych przypadków jest to, że względne odkształcenie ciała zależy od wartości siły odkształcającej ciało, jaka przypada na jednostkę jego pola powierzchni. Wielkość tę nazywa się **naprężeniem** (termin ten ma tu inne znaczenie niż poprzednio, gdy naprężeniem sztywnej liny lub sznura nazywaliśmy działającą nań siłę; gdy ciało ulega odkształceniu, wygodnie jest odnosić tę siłę do pola powierzchni, na jaką ona działa). Rysunek 12.11 przedstawia odpowiednio: a) *naprężenie rozciągające*, b) *naprężenie ścinające* i c) *naprężenie objętościowe* (hydrostatyczne).

W trzech przypadkach przedstawionych na rysunku 12.11 naprężenia i odkształcenia mają różną postać, lecz w każdym z nich naprężenie i odkształcenie są do siebie proporcjonalne — przynajmniej w zakresie ich przydatności w technice. Odpowiedni współczynnik proporcjonalności nazywa się **modułem sprężystości**, tak że

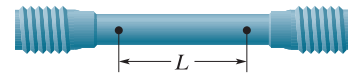
$$\text{naprężenie} = (\text{moduł sprężystości}) \cdot (\text{odkształcenie}). \quad (12.22)$$

W trakcie rutynowych badań wytrzymałości materiałów na rozciąganie do walca (takiego jak na rys. 12.12) przykładą się naprężenie rozciągające, zwiększając stopniowo jego wartość od zera aż do wartości, przy której walec pęka. Odkształcenie walca jest przy tym dokładnie mierzone i analizowane jako funkcja przyłożonego naprężenia. Typowa zależność odkształcenia od naprężenia jest przedstawiona na rysunku 12.13. W znacznym zakresie przyłożonego naprężenia odkształcenie jest wprost proporcjonalne do naprężenia, a próbka powraca do pierwotnych wymiarów po usunięciu naprężenia; w tym zakresie spełnione jest równanie (12.22). Po przekroczeniu przez naprężenie pewnej wartości, noszącej nazwę **granicy sprężystości** materiału, próbka ulega odkształceniu trwałemu (plastycznemu). Przy dalszym zwiększaniu naprężenia można doprowadzić do pęknięcia próbki, co zachodzi dla naprężenia noszącego nazwę **naprężenia niszczącego**.

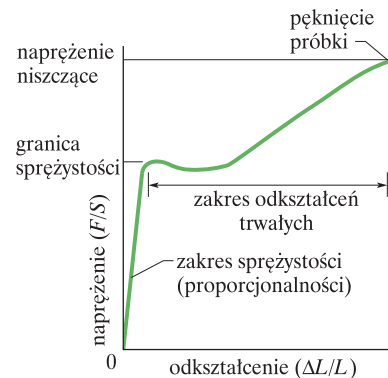
Rozciąganie i ściskanie

W najprostszym przypadku, gdy ciało jest rozciągane lub ściskane, naprężenie definiuje się jako F/S , gdzie F jest wartością siły przyłożonej do ciała w miejscu, w którym ciało ma pole S przekroju prostopadłego do kierunku działania siły. Za miarę odkształcenia przyjmuje się wielkość bezwymiarową $\Delta L/L$, czyli względną zmianę długości próbki (wyrażaną też czasem w procentach). Jeśli próbka ma kształt długiego walca, a naprężenie nie przekracza granicy sprężystości, to przy danym naprężeniu odkształcenie (względne) zarówno całego pręta, jak i każdego jego odcinka jest takie samo. Odkształcenie jest wielkością bezwymiarową, a zatem moduł sprężystości z równania (12.22) ma taki sam wymiar jak naprężenie, tzn. siły podzielonej przez pole powierzchni.

Moduł sprężystości związany z odkształceniem przy rozciąganiu lub ściskaniu nazywa się **modułem Younga** i oznacza zwykle symbolem E .



Rys. 12.12. Walec testowy używany do wyznaczania zależności odkształcenia od naprężenia, której przykład przedstawiono na rysunku 12.13. Mierzy się zmianę długości ΔL pewnego odcinka o długości początkowej L



Rys. 12.13. Zależność odkształcenia od naprężenia dla próbki ze stali o kształcie jak na rysunku 12.12. Próbkę ulega odkształceniu trwałemu po przekroczeniu przez naprężenie *granicy sprężystości* materiału. Próbkę pęka po osiągnięciu przez naprężenie wartości odpowiadającej *naprężeniu niszczącemu* dla badanego materiału