wprowadzaną do bazy jest zmienna x_2 (najwyższa wartość bezwzględna). Pierwszy element kolumny jest równy 3, można więc wyznaczyć wartość $\theta_1 = 24/3 = 8$. Drugi element jest równy 0, czyli nie można wyznaczyć odpowiedniego ilorazu. Spośród wszystkich możliwych wartości θ_i powinniśmy wybrać najmniejszą. W obecnej sytuacji na zmienną usuwaną możemy jedynie wybrać x_3. Wyniki wyliczeń przedstawione są w tabeli 7.

Tabela 7. Tablica sympleksowa – zmienna usuwana z bazy.

	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	θ_i
x_B	$c_B \setminus c_j$	2	5	0	0		
x_3	0	3	3	1	0	24	8
x_4	0	1	0	0	1	4	×
	z_j	0	0	0	0	0	
	k_j	2	5	0	0		

Elementem centralnym jest element leżący na przecięciu kolumny zmiennej x_2 z wierszem zmiennej x_3. Aby odpowiednio przekształcić macierz, wykonujemy operacje elementarne: $w_1' = 1/3 w_1$ i $w_2' = w_2$. Pamiętaj, że przekształcamy zarówno elementy macierzy ograniczeń, jak i wyrazy wolne. Macierz po przekształceniach i wyznaczeniu koniecznych wielkości zawiera tabela 8 (zauważ, że zmienną x_3 z lewej strony zmieniła nowa zmienna bazowa x_2).

Tabela 8. Rozwiązanie optymalne.

	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	θ_i
x_B	$c_B \setminus c_j$	2	5	0	0		
x_2	5	1	1	1/3	0	8	
x_4	0	1	0	0	1	4	
	z_j	5	5	5/3	0	40	
	k_j	–3	0	–5/3	0		

Ponieważ wszystkie kryteria sympleksowe mają wartości mniejsze lub równe 0, otrzymane rozwiązanie jest optymalne. Wartości zmiennych bazowych odczytujemy w kolumnie b_i: $x_2 = 8$, $x_4 = 4$, zmienne niebazowe równe są 0 (a więc optymalna produkcja wynosi 8 tys. sztuk wyrobu B). W kolumnach, które na początku tworzyły macierz jednostkową, w wierszu z_j odczytujemy wartości zmiennych dualnych: $y_1 = 5/3$, $y_2 = 0$, a ponad nimi postać macierzy odwrotnej bazy:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

Optymalna wartość funkcji celu równa jest 40 (czyli optymalny zysk wynosi 40 tys. zł). Zwróć uwagę na jeszcze jeden element – interpretację kryteriów sympleksowych k_j i ilorazów θ_i. Przypomnijmy, że k_j mówi, o ile wzrośnie wartość funkcji celu, gdy zmienna niebazowa x_j wzrośnie o jedną jednostkę. Iloraz θ_i informuje z kolei o tym, o ile wzrośnie zmienna wprowadzana do bazy, gdy usuniemy z niej zmienną bazową x_i. Z tablicy 7 wynika, że zmienna wprowadzana, czyli x_2 wzrośnie o 8 ($\theta_1 = 8$). Tak jest w istocie – w kolejnym rozwiązaniu $x_2 = 8$. Z tej samej tablicy możemy odczytać, że wraz ze wzrostem x_2 o jednostkę funkcja celu wzrasta o 5. Faktycznie, po wzroście x_2 o 8 funkcja celu wzrosła o $5 \cdot 8 = 40$.

Przejdźmy teraz do odpowiedzi na dodatkowe podpunkty.

Ad a)
Jeżeli produkcja wyrobu *A* ma być opłacalna, odpowiadające mu kryterium sympleksowe k_1 musiałoby być większe od 0 (ewentualnie równe 0, wtedy wprowadzenie zmiennej x_1 do bazy nie zmieniłoby wartości funkcji celu). Ponieważ jednak $k_1 = c_1 - z_1$, a wiemy że $z_1 = 5$ nie zależy od c_1, otrzymujemy nierówność $c_1 - 5 \geq 0$, a stąd ograniczenie na zysk $c_1 \geq 5$. Zysk musiałby być równy co najmniej 5 zł za sztukę.

Ad b)
Oznaczmy wartość popytu przez b_2. Wektor wyrazów wolnych (i jednocześnie wartości zmiennych bazowych) przyjmie wówczas początkową postać $[24, b_2]^T$, w rozwiązaniu optymalnym zaś:

$$x_B = B^{-1}\begin{bmatrix} 24 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{3.48}$$

Warunkiem niezmienności struktury rozwiązania jest, aby zmienne bazowe pozostały nieujemne (inaczej konieczny byłby wybór innej bazy). Stąd wzrost b_2 (czyli popytu) nie spowoduje żadnych zmian w strukturze rozwiązania.

Ad c)
Niech A_1 oznacza pierwszą kolumnę tablicy sympleksowej po zakończeniu działania algorytmu 2. Przez a_{11} oznaczmy szukany nakład. Pierwsza kolumna ma początkowo postać $[a_{11}, 1]^T$, więc po zakończeniu działania algorytmu będzie równa:

$$A_1 = B^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}a_{11} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Oznacza to z kolei, że $z_1 = 5 \cdot 1/3a_{11} + 0 \cdot 1 = 5/3a_{11}$ i $k_1 = c_1 - z_1 = 2 - 5/3a_{11}$. Warunkiem zmiany rozwiązania jest, aby $k_1 \geq 0$, czyli $a_{11} \leq 1{,}2$. Nakład musiałby być równy co najwyżej 1,2 jednostki na sztukę.

Przykład 3 – cd.
Rozwiąż zadanie metodą sympleks.

Rozwiązanie
Postać bazowa zadania jest następująca:

$$\begin{aligned}
&(0) f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 9x_1 + 6x_2 + Mx_5 \to \min,\\
&(1)\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad + x_5 = 24,\\
&(2)\ 3x_1 + 3x_2 \quad\quad + x_4 \quad\quad = 12,\\
&(3)\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Pierwsza tablica sympleksowa ma w związku z tym postać (zwróć uwagę na kolejność zmiennych bazowych!):

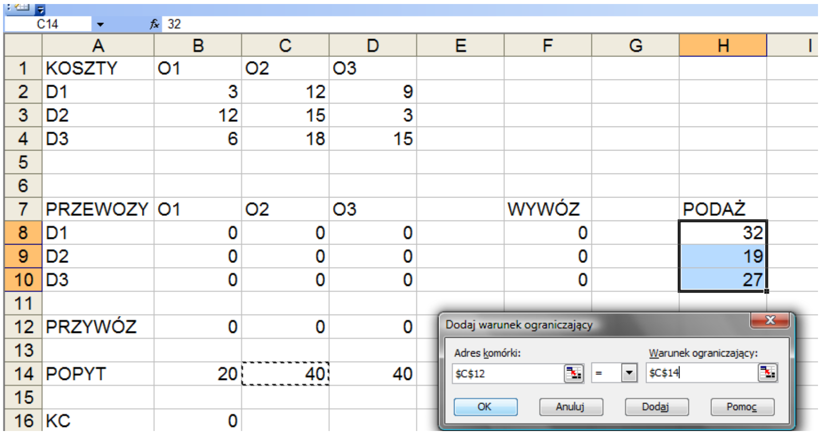
Tabela 9. Przykład 3 – pierwsza tablica sympleksowa

	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_B	$c_B \setminus c_j$	9	6	0	0	M		
x_5	M	4	2	–1	0	1	24	6
x_4	0	3	3	0	1	0	12	4
	z_j	$4M$	$2M$	$-M$	0	M	$24M$	
	k_j	$9 - 4M$	$6 - 2M$	M	0	0		

Zmienną wprowadzaną do bazy jest x_1, usuwaną zaś – x_4. Operacje elementarne przyjmą postać $w_1' = w_1 - 4/3w_2$ i $w_2' = 1/3w_2$. Nowa tablica sympleksowa pokazana jest w tabeli 10.

Tabela 10. Przykład 3 – druga tablica sympleksowa

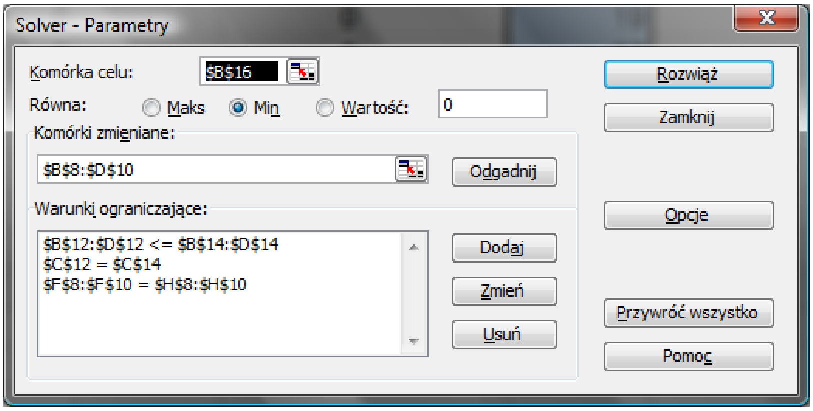
	x_j	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	θ_i
x_B	$c_B \setminus c_j$	9	6	0	0	M		
x_5	M	0	–2	–1	–4/3	1	8	
x_1	9	1	1	0	1/3	0	4	
	z_j	9	$9 - 2M$	$-M$	$3 - 4/3M$	M	$36 + 8M$	
	k_j	0	$2M - 3$	M	$4/3M - 3$	0		



Rys. 37. Maksymalne wykorzystanie popytu

Warunek ten sprawia, że jeden z warunków wprowadzonych wcześniej staje się zbędny. Z praktycznego punktu widzenia nie ma to jednak znaczenia – pokazany sposób wprowadzenia ograniczeń jest bodaj najszybszy, a *Solver* i tak poradzi sobie z zadaniem w ciągu milisekund.

Ostatnim krokiem jest zaznaczenie odpowiednich opcji, jak we wszystkich dotychczas rozwiązywanych zadaniach PL. Musimy więc zaznaczyć opcje *Przyjmij model liniowy* i *Przyjmij nieujemne*. Po powrocie do głównego okna dodatku *Solver* widok powinien być jak na rys. 38.



Rys. 38. Okno dodatku *Solver*

Klikamy „Rozwiąż". Po wykonaniu polecenia arkusz przedstawia się jak na rys. 39.

Oczywiście, podobnie jak w przypadku wszystkich zadań rozwiązywanych za pomocą dodatku *Solver* może się zdarzyć sprzeczność lub rozbieżność. Z kolei

Sytuację przedstawia rys. 44. Warunek (6) jest oczywiście równoległy do izokwanty przychodu, zaś izokwanta $I_{2\min}$ zmieniła swoje położenie. Obecnie minimum kosztu osiągane jest w punkcie (2,5; 1), więc wartość minimalna wynosi 23. Oznacza to, że stopień realizacji wyraża się wzorem:

$$r_2(x_1, x_2) = \frac{M_2 - f_2(x_1, x_2)}{M_2 - m_2} = \frac{36 - (6x_1 + 8x_2)}{36 - 23} = -6/13x_1 - 8/13x_2 + 36/13. \quad (6.27)$$

Wprowadzamy nowy warunek: $r_1(x_1, x_2) = -6/13x_1 - 8/13x_2 + 36/13 \geq 10/13$. Ponieważ zysk jest ostatnim kryterium, zadanie pomocnicze sprowadza się już tylko do maksymalizacji zysku przy nowych ograniczeniach (zadanie (6.28)). Jego rozwiązanie znajduje się w punkcie (3, 1). Oznacza to, że rozwiązaniem kompromisowym jest produkcja 3 tys. szt. wyrobu *A* i 1 tys. szt. wyrobu *B*.

$$\begin{array}{ll}
(0) & f_3(x_1, x_2) = 10x_1 + 8x_2 \to \max, \\
(1) & 6x_1 + 12x_2 \leq 48, \\
(2) & 18x_1 + 12x_2 \leq 72, \\
(3) & x_1 \geq 1, \\
(4) & x_2 \geq 1, \\
(5) & x_1, x_2 \geq 0, \\
(6) & 1/3x_1 + 1/3x_2 - 2/3 \geq 0{,}5, \\
(7) & -6/13x_1 - 8/13x_2 + 36/13 \geq 10/13.
\end{array} \quad (6.28)$$

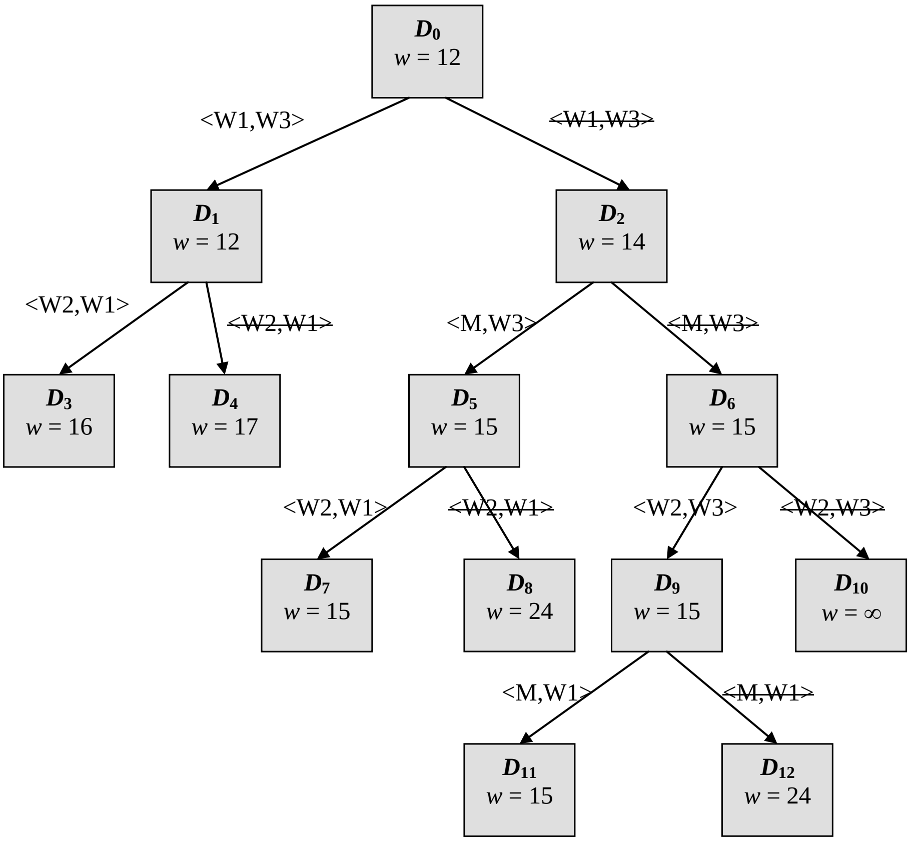
6.5. ZAGADNIENIA DO POWTÓRZENIA

1. Zdefiniuj punkt idealny i antyidealny.
2. Podaj postać zadania pomocniczego dla maksymalizacji minimalnego stopnia realizacji kryteriów.
3. Podaj postać wyjściową zadania programowania celowego, stosowane podstawienie i ostateczną postać zadania pomocniczego.

6.6. ZADANIA

1. Firma produkuje dwa wyroby: *A* i *B*, korzystając z dwóch surowców S_1 i S_2. Dane na temat zasobów surowców (w tonach), ich nakładach na produkcję wyrobów (w kg za szt.), cenach wyrobów (w zł za szt.) i koszcie produkcji (w zł za szt.) zawiera tabela. Dodatkowo wiadomo, że w wyniku podpisania umów

Podział następuje ze względu na trasę <M, W1>. W jego wyniku powstaje jednoelementowy podzbiór D_{11} o oszacowaniu równym 15 (macierz zredukowana w tabeli 92) i podzbiór D_{12}, który zamykamy ze względu na zbyt wysokie oszacowanie kosztu (24). To kończy działanie algorytmu. Ostateczny wygląd drzewa rozwiązań przedstawia rys. 70.



Rys. 70. Drzewo rozwiązań

Tabela 92. Zredukowana macierz kosztu dla D_{11}

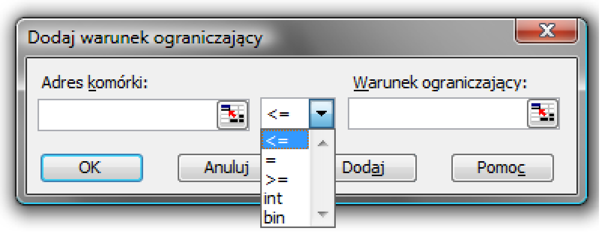
D11	M	W2
W1	∞	0
W3	0	∞

Trzy zbiory jednoelementowe to: D_3 (cykl (M, W2, W1, W3, M), koszt 16), D_7 (cykl (M, W3, W2, W1, M), koszt 15) i D_{11} (cykl (M, W1, W2, W3, M), koszt 15). Dwa ostatnie rozwiązania są więc optymalne (o czym już wiesz).

znalazł rozwiązanie, w którym funkcja celu przyjmie odpowiednią wartość. Ten ostatni wariant przydaje się właśnie w sytuacji, gdy chcesz rozwiązać równanie (lub układ równań), a nie zadanie optymalizacyjne.

Komórki zmieniane to pole, do którego wprowadzasz adresy komórek, w których znajdują się wartości zmiennych decyzyjnych. Przycisk ***Odgadnij*** pozwala, aby *Solver* sam wybrał komórki. Szczerze odradzam korzystanie z tej opcji – w przypadku większości zadań efekty „odgadywania" są co najmniej zaskakujące.

Warunki ograniczające to lista wprowadzonych przez Ciebie ograniczeń. Aby wprowadzić nowe ograniczenie, musisz użyć przycisku *Dodaj*. Pojawia się okno warunku jak na rys. D3. W lewym polu, *Adres komórki*, wprowadzasz adres komórki, w której znajduje się wyrażenie będące lewą stroną wybranego warunku ograniczającego. Pośrodku możesz wybrać typ warunku: $\leq$, =, $\geq$ albo jedno z dwóch ograniczeń stosowanych w programowaniu dyskretnym – int wymusza całkowitość, bin zaś binarność. W wypadku wyboru którejś z trzech pierwszych opcji w prawym polu (*Warunek ograniczający*) wprowadzasz adres komórki zawierającej prawą stronę warunku albo liczbę, która jej odpowiada. Jeżeli wybrany został warunek typu int albo bin, prawe pole wypełnia się automatycznie.



Rys. D3. Okno wprowadzania warunku

W ten sam sposób możesz zmienić wcześniej wprowadzony warunek ograniczający. W tym celu w oknie głównym programu wybierasz opcję *Zmień*, po wcześniejszym zaznaczeniu warunku na liście. Opcja *Usuń* pozwala, po wcześniejszym zaznaczeniu, usunąć wybrany warunek ograniczający.

Przejdźmy do przycisków z prawej strony okna. ***Rozwiąż*** służy do rozwiązania wprowadzonego zadania. Zanim go jednak użyjesz, przeważnie niezbędne jest ustawienie opcji zadania, o czym napisałem niżej. ***Zamknij*** powoduje zamknięcie okna głównego z zachowaniem wpisanych ustawień. ***Przywróć wszystko*** powoduje cofnięcie wprowadzonych zmian, a ***Pomoc*** – wyświetlenie (raczej lakonicznej) pomocy na temat dodatku *Solver*.