

ZGODNE Z  
USZCZUPLONĄ  
PODSTAWĄ  
PROGRAMOWĄ

WYDANIE  
UAKTUALNIONE

## ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH



# Nowa teraz matura

## MATEMATYKA

● Poziom rozszerzony

- wszystkie typy zadań maturalnych
- optymalna liczba zadań
- zadania CKE
- odpowiedzi i modele rozwiązań
- zestaw wzorów

# Korzystaj z cyfrowego wspomaganie nauki

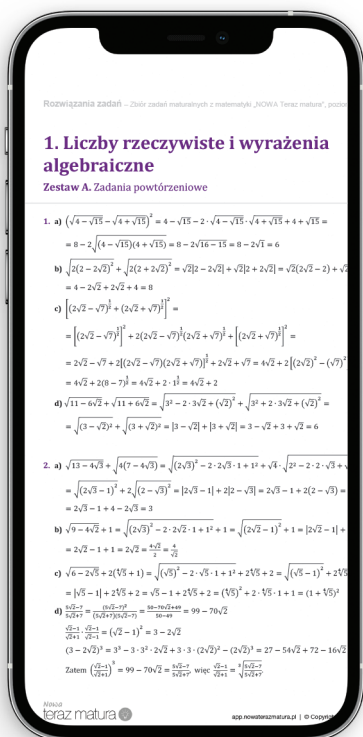
Nowa  
teraz  
matura

Zbiór zadań maturalnych połączony jest z aplikacją [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl). Znajdziesz tam materiały cyfrowe, które ułatwiają i urozmaicają przygotowania do egzaminu.

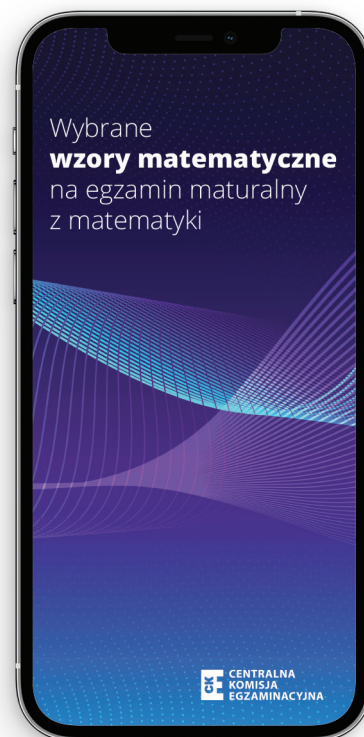
## FILMY



## ROZWIĄZANIA WSZYSTKICH ZADAŃ



## WZORY CKE



## Jak uzyskać dostęp do materiałów cyfrowych?

- 1 Wejdź na [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl)
- 2 Zarejestruj się / zaloguj się.
- 3 Wpisz w aplikacji kod dostępu **ukryty pod zdrapką**.
- 4 Korzystaj z materiałów cyfrowych w wybrany przez siebie sposób:
  - skanuj kody QR zamieszczone w publikacji **lub**
  - wpisz w aplikacji kody alfanumeryczne kodów QR **lub**
  - wyszukuj materiały w aplikacji.

KOD  
DOSTĘPU

KOD UMOŻLIWI DOSTĘP DO MATERIAŁÓW  
OD 1 WRZEŚNIA DO 31 SIERPNIANASTĘPNEGO ROKU,  
NIEZALEŻNIE OD DNIA AKTYWACJI.



# Spis treści

Co znajdziesz w Zbiorze zadań maturalnych? ..... 4

## Powtórzenie dział po dziale

1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne .....	8
2. Funkcje. Funkcja liniowa .....	17
3. Funkcja kwadratowa .....	25
4. Wielomiany .....	35
5. Funkcja wymierna .....	43
6. Funkcja wykładnicza i funkcja logarytmiczna .....	52
7. Trygonometria .....	61
8. Ciągi .....	70
9. Planimetria .....	83
10. Geometria analityczna .....	97
11. Stereometria .....	108
12. Rachunek różniczkowy .....	118
13. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka .....	128

## Odpowiedzi i modele rozwiązań

Powtórzenie dział po dziale .....	144
Zestaw wzorów .....	271

SPRAWDŹ  
AKTUALNOŚCI CKE



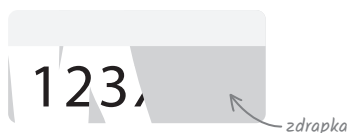
Kod:  
4ZGYEL

[app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl)

## Co znajdziesz w Zbiorze zadań maturalnych?

Zbiór zadań maturalnych „NOWA Teraz matura” do matematyki na poziomie rozszerzonym gwarantuje bardzo dobre przygotowanie do egzaminu z matematyki na obu poziomach. Zapewnia optymalny dobór i liczbę zadań. Dzięki zbiorowi zapoznasz się z różnymi typami poleceń zadań egzaminacyjnych. Rozwiązania do wszystkich zadań umieszczamy pod kodami QR – pozwolą one szybko sprawdzić, jak poradzić sobie z zadaniem, które sprawia ci problem. Część rozwiązań prezentujemy w postaci filmowej. Możesz skorzystać też z modeli rozwiązań zadań otwartych – znajdziesz je w drugiej części zbioru. Liczne odsyłacze zarówno do odpowiednich elementów zbioru oraz związanych z nim zasobów cyfrowych, jak i do innych publikacji, ułatwiają poruszanie się po zbiorze oraz korzystanie z dodatkowych pomocy.

Poniżej przedstawiamy poszczególne elementy układu treści w zbiorze, a także stosowane w nim oznaczenia.



Na początku publikacji znajdziesz kod dostępu do aplikacji [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl). Zarejestruj się tam, aktywuj kod i korzystaj z zasobów cyfrowych do serii „NOWA Teraz matura”. Skanuj kody QR podczas pracy na urządzeniach mobilnych lub wpisuj kody literowo-cyfrowe do aplikacji podczas pracy przy komputerze.

### 3. Funkcja kwadratowa

Funkcją kwadratową lub trójmianem kwadratowym

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Każdy dział pierwszej części zbioru zaczyna się od **zwięzłego wstępu** teoretycznego. Wyróżniliśmy go niebieskim tłem.

#### Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

Zadania w dziale są podzielone na trzy zestawy. W zestawie A znajdują się zadania ćwiczeniowe, często z kilkoma podpunktami, umożliwiające **powtórzenie materiału**.

#### Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

Zestaw B zawiera zadania zamknięte i otwarte. Przy każdym zadaniu podano liczbę punktów przyznawaną za poprawne rozwiązanie. Egzamin w nowej formule przewiduje dużą **różnorodność zadań zamkniętych**. Oprócz zadań wielokrotnego wyboru znajdują się tam zadania typu prawda/fałsz, zadania na dobieranie, na uzasadnianie oraz wiązki zadaniowe.

#### Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

Zestaw C to **wyłącznie zadania otwarte**. Na egzaminie na poziomie rozszerzonym wystąpi tylko taki rodzaj zadań. Ich rozwiązanie często wymaga złożonych i kilkietapowych działań. W tym zestawie umieszczamy także zadania typu wiązka – jest to grupa zadań powiązanych ze sobą tematycznie.

CKE maj 2025 PP

CKE maj 2025 PR

**Wzory matematyczne CKE****Kod: GZ4ZYN**  
app.nowaterazmatura.pl

Oznaczenie zadania, które wystąpiło na maturze w poprzednich latach lub w materiałach CKE i pasuje także do obecnych wymagań egzaminacyjnych dla poziomu podstawowego (PP) lub dla poziomu rozszerzonego (PR).

**Film – rozwiązanie zadania**

3 min

**Kod: 33BTMB**  
app.nowaterazmatura.pl

34.

Niebieskim zakreślaczem zostały wyróżnione numery wybranych zadań, reprezentatywnych dla działu. Za nie zabierz się w pierwszej kolejności, jeśli zdecydujesz się na szybką powtórkę. Do każdego takiego zadania jest dołączone **rozwiązanie w postaci filmu**.

Youtuber MiedzianyFsor prezentuje rozwiązania zadań tylko z poziomu podstawowego.

Rozwiązania zadań z poziomu rozszerzonego prezentuje youtuber Marcin, prowadzący kanał Matma z pasją. Marcin rozwiązał również kilka zadań z poziomu podstawowego, które są w zestawie B.

Z lewej strony kodu QR jest umieszczony orientacyjny czas trwania filmu.

**Film – rozwiązanie zadania**

7 min

**Kod: CTYN15**  
app.nowaterazmatura.pl

16.

**Rozwiązania zadań – zestaw A****Kod: EKWUPP**  
app.nowaterazmatura.pl

Oznaczenie kodu QR umieszczonego w części *Odpowiedzi i modele rozwiązań* kierującego do plików PDF z **pełnymi rozwiązaniami wszystkich zadań**.

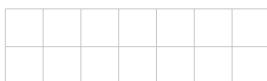
→ **Odpowiedzi**  
s. 144

Odsyłacz do krótkich **odpowiedzi**, które znajdują się w drugiej części zbioru.

**Zestaw A – odpowiedzi**  
**Zestaw B – odpowiedzi**  
**Zestaw C – odpowiedzi**

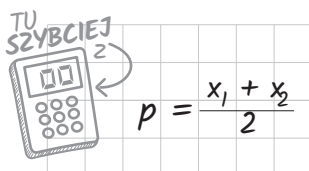
Druga część zbioru to *Odpowiedzi i modele rozwiązań*. Dzięki krótkim odpowiedziom można szybko sprawdzić końcowy wynik każdego zadania.

## Zestaw B – modele rozwiązań zadań otwartych



Modele rozwiązań zadań otwartych z zestawów B i C to skrócone rozwiązania zadań podzielone na etapy, zgodnie z **punktacją danego zadania**. Możesz je porównać z własnymi pomysłami lub wykorzystać jako wskazówki.

Kratka na marginesie **zachęca do robienia własnych notatek**, dzięki którym zbiór nabierze indywidualnego charakteru.



Na marginesach znajdują się dopiski, które sugerują, że do rozwiązania zadania warto użyć kalkulatora (na maturze z matematyki można używać kalkulatora prostego) lub skorzystać z podanego wzoru matematycznego, rysunku czy pomysłu na rozwiązanie.



Aby pogłębić wiadomości teoretyczne i znaleźć przykładowe zadania związane z danym zagadnieniem, warto sięgnąć po vademecum z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura”. Układy treści zbioru zadań maturalnych i vademecum są ze sobą ściśle skorelowane.



Osiągnięcie najwyższej formy przed egzaminem zapewnią arkusze maturalne z matematyki na poziomie rozszerzonym z serii „NOWA Teraz matura”. Pracę z arkuszami polecamy na zakończenie przygotowań do matury, gdy całość powtórzenia będziesz mieć już za sobą.

# Powtórzenie dział po dziale

# 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Wzory  
matematyczne CKE



Kod: GZ4ZYN  
app.nowaterazmatura.pl

## Potęga o wykładniku całkowitym

$$a^0 = 1 \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ dla } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ dla } a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

## Potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \text{ dla } a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \text{ dla } a > 0, n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{Z}$$

## Działania na potęgach

Dla dowolnych liczb  $a, b > 0$  i  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

## Pierwiastek $n$ -tego stopnia

Dla parzystej liczby  $n \in \mathbb{N}_+$  i  $a \geq 0$ :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

Dla nieparzystej liczby  $n \in \mathbb{N}, n > 1$  i  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ gdy } b^n = a$$

## Działania na pierwiastkach

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ dla } a, b \geq 0$$

$$\sqrt[3]{a \cdot b} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} \text{ dla } a, b \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ dla } a \geq 0, b > 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \text{ dla } a \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

## Wzory skróconego mnożenia

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

## Różnica $n$ -tych potęg

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$$

## Silnia

$$0! = 1 \text{ oraz } n! = (n-1)! \cdot n \text{ dla } n \in \mathbb{N}_+$$

## Symbol Newtona

Dla  $n, k \in \mathbb{N}$  takich, że  $k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

w szczególności:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

## Wzór dwumianowy Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

**Wartość bezwzględna**Dla  $a \in \mathbb{R}$ :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{dla } a \geq 0 \\ -a & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

**Własności wartości bezwzględnej**Dla  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$|-a| = |a|$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$|a - b| = |b - a|$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{dla } b \neq 0$$

Więcej –  
Vademecum PRWięcej –  
Arkusze  
maturalne PR**Zestaw A. Zadania powtórzeniowe**

1. Oblicz.

a)  $(\sqrt{4 - \sqrt{15}} - \sqrt{4 + \sqrt{15}})^2$

c)  $\left[ (2\sqrt{2} - \sqrt{7})^{\frac{1}{2}} + (2\sqrt{2} + \sqrt{7})^{\frac{1}{2}} \right]^2$

b)  $\sqrt{2(2 - 2\sqrt{2})^2} + \sqrt{2(2 + 2\sqrt{2})^2}$

d)  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} - \sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2} - 7}{5\sqrt{2} + 7}}$

2. Wykaż, że zachodzi równość.

a)  $\sqrt{13 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{4(7 - 4\sqrt{3})} = 3$

c)  $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} + 2(\sqrt[4]{5} + 1) = (1 + \sqrt[4]{5})^2$

b)  $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + 1 = \frac{4}{\sqrt{2}}$

d)  $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{11 + 6\sqrt{2}} = 6$

3. Wykaż, że podana liczba jest wymierna.

a)  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$

c)  $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} - \sqrt{21 - 12\sqrt{3}}$

b)  $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

d)  $\sqrt{33 + 20\sqrt{2}} - \sqrt{8\frac{1}{4} + 2\sqrt{2}}$

4. Usuń niewymierność z mianownika.

a)  $\frac{6}{3 - 2\sqrt{3}}$

b)  $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

c)  $\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1}$

d)  $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2}$

5. Usuń niewymierność z mianownika.

a)  $\frac{3}{1 + \sqrt[3]{2}}$

b)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - 1}$

c)  $\frac{2}{2 + \sqrt[3]{3}}$

d)  $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$

6. Uprość wyrażenie.

a)  $\frac{x + y}{\sqrt{x^4 + 2x^3y + x^2y^2}}, \quad x, y > 0$

c)  $\frac{x - y}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}, \quad x \neq y$

b)  $\frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \quad x, y > 0$

d)  $\sqrt{2x + 2\sqrt{2x - 1}} - \sqrt{2x - 2\sqrt{2x - 1}}, \quad x > 1$

→ Odpowiedzi  
s. 144

d)  $11 - 6\sqrt{2} = 3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

Film –  
rozwiązanie  
zadania

5 min

Kod: 6AK6TC  
app.nowaterazmatura.pl

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE



Film –  
rozwiązanie  
zadania



2 min



Kod: PFSSXA  
app.nowaterzatura.pl

7. Wykaż, że dla  $x > 0$  i  $y > 0$  prawdziwa jest podana nierówność.

a)  $2xy \leq x^2 + y^2$

b)  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

c)  $\frac{2x}{y} + \frac{y}{2x} \geq 2$

8. Oblicz.

a)  $(1 + \sqrt{3})^3$

b)  $(2 + \sqrt{3})^3$

c)  $(3 - \sqrt{2})^3$

d)  $(1 - 2\sqrt{3})^3$

9. Zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a)  $(x+1)^3 + (x+2)^3$

c)  $(2x-1)^3 - (2x+1)^3$

b)  $(x-2)^3 + (x-3)^3$

d)  $(3x+2)^3 - (3x-1)^3$

10. Oblicz wartość wyrażenia dla  $x = \sqrt[3]{3}$  i  $y = 2\sqrt[3]{2}$ .

a)  $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

c)  $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$

b)  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

d)  $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

11. Wykaż prawdziwość wzoru.

a)  $a^6 - 1 = (a-1)(a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$

b)  $a^6 - 1 = (a-1)(a+1)(a^4 + a^2 + 1)$

12. Z sześcianu o krawędzi  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  odcięto osiem narożników, które są sześcianami o krawędzi  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ . Oblicz:

a) objętość otrzymanej bryły,

b) pole powierzchni całkowitej otrzymanej bryły.

13. Oblicz.

a)  $\binom{7}{0}$

c)  $\binom{7}{2}$

e)  $\binom{7}{4}$

g)  $\binom{7}{6}$

b)  $\binom{7}{1}$

d)  $\binom{7}{3}$

f)  $\binom{7}{5}$

h)  $\binom{7}{7}$

14. Udowodnij wzór dla  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ .

a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

15. W pewnym wierszu trójkąta Pascala występują kolejno liczby:

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Zapisz dwa kolejne wiersze trójkąta Pascala.

16. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona, zapisz wyrażenie w postaci sumy algebraicznej.

a)  $(a+b)^4$

c)  $(a+b)^5$

e)  $(a+b)^6$

g)  $(a+b)^7$

b)  $(a-b)^4$

d)  $(a-b)^5$

f)  $(a-b)^6$

h)  $(a-b)^7$

17. Oblicz.

a)  $(\sqrt{2}+1)^5$

b)  $(\sqrt{2}-1)^5$

c)  $(\sqrt{3}+2)^5$

d)  $(\sqrt{3}-2)^5$

Trójkąt Pascala

```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
.....

```

18. Podaj współczynnik wielomianu  $w$  przy  $x^4$ .

a)  $w(x) = (2x + 1)^5$

b)  $w(x) = (2x + 3)^6$

c)  $w(x) = (2x - 1)^7$

19. Podaj współczynnik wielomianu  $w$  przy  $x^{10}$ .

a)  $w(x) = (x^3 - x)^4$

b)  $w(x) = (x^3 + 2x^2)^5$

c)  $w(x) = (x^2 + 2x)^6$

20. Udowodnij, że suma:

a) trzech kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 3,

b) czterech kolejnych liczb podzielnych przez 4 jest podzielna przez 8,

c) pięciu kolejnych liczb podzielnych przez 3 jest podzielna przez 15.

21. Wykaż, że:

a) suma kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą,

b) sześćcian sumy dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielny przez 64.

22. a) Udowodnij, że jeśli reszta z dzielenia liczby  $n$  przez 3 jest równa 2, to reszta z dzielenia liczby  $n^3$  przez 9 jest równa 8.

b) Udowodnij, że jeśli reszta z dzielenia liczby  $n$  przez 5 jest równa 3, to reszta z dzielenia liczby  $n^3$  przez 5 jest równa 2.

23. Dana jest liczba trzycyfrowa  $x$ . Liczba  $y$  powstaje z liczby  $x$  przez zamianę jej cyfry jedności z cyfrą setek. Wykaż, że różnica liczb  $x$  i  $y$  jest podzielna przez 9 oraz przez 11.

24. a) Przez jaką największą liczbę należy podzielić liczby 331 i 459, aby w obu przypadkach otrzymać resztę z dzielenia równą 11?

b) Przez jaką liczbę należy podzielić liczby 589 i 667, aby otrzymać reszty z dzielenia równe odpowiednio 1 i 7?

25. Wyznacz wszystkie pary liczb:

a) naturalnych  $a$  i  $b$ , dla których  $a^2 - b^2 = 36$ ,

b) całkowitych  $a$  i  $b$ , dla których  $a^2 - b^2 = 15$ .

26. Wyznacz zbiory  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ .

$$A = \{x \in \mathbb{R}: |x - 1| = 1 - x\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R}: |2x - 1| = 2x - 1\}$$

27. Wyznacz zbiór  $A \setminus B$ , jeżeli  $A = \left[-\sqrt{2} \cdot 0,5^{-\frac{3}{2}}; 6\right]$  i  $B = \{x \in \mathbb{R}: |x - 1| > 4\}$ .

28. Wykaż, że dla danych wartości  $x$  prawdziwa jest podana równość.

a)  $\frac{\sqrt{4x^2 + 16x + 16}}{x + 2} = 2$  dla  $x > -2$

b)  $\frac{\sqrt{36 - 24x + 4x^2} + |x - 3|}{\sqrt{9 - 6x + x^2}} = 3$  dla  $x \neq 3$

29. Rozwiąż równanie.

a)  $||x| - 1| = 3$

b)  $||x| + 3| = 1$

c)  $||x + 1| - 3| = 2$

30. Rozwiąż nierówność.

a)  $|2x - 4| \leq 6$

b)  $|x - 3| > 4$

c)  $|5 - |x|| > 3$



Film –  
rozwiązanie  
zadania



2 min



Kod: HV4SJD  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



7 min



Kod: 4CS39V  
app.nowaterazmatura.pl

→ Odpowiedzi  
s. 144

### Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

W zadaniach 31–39 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

31. (0–1)

Dana jest piętnastocyfrowa liczba  $2111111111111x2$ . Jeśli jest ona podzielna przez 12, to cyfrą  $x$  jest

- A. 7                      B. 5                      C. 3                      D. 1

32. (0–1)

Dane są liczby  $x = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7^2$  i  $y = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$ . Jeśli  $a$  jest najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb  $x$  i  $y$ ,  $b$  zaś – ich największym wspólnym dzielnikiem, to iloraz  $\frac{a}{b}$  wynosi

- A. 360                      B. 180                      C. 90                      D. 45

33. (0–1) CKE Informator 2024 PP

Wartość wyrażenia  $2024 : \left(1 - \frac{1}{2025}\right) - \left(1 - \frac{2025}{2024}\right) : \frac{1}{2024}$  jest równa

- A. 0                      B. 1                      C. 2024                      D. 2026

34. (0–1)

Liczba  $\frac{0,4^2 : \left(1\frac{1}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}}{(3^{-1} + 2^{-1}) \cdot 1,2^2}$  jest równa

- A.  $-\frac{2}{15}$                       B.  $-\frac{3}{5}$                       C.  $\frac{2}{5}$                       D.  $\frac{4}{15}$

35. (0–1)

Równość  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-7} = 3^m$  jest prawdziwa dla

- A.  $m = -6$                       B.  $m = -4$                       C.  $m = -2$                       D.  $m = 4$

36. (0–1)

Liczba  $(3\sqrt{40} - 3\sqrt{160} + 2\sqrt{810}) : 2\sqrt{5}$  jest równa

- A.  $12\sqrt{2}$                       B.  $9\sqrt{2}$                       C.  $6\sqrt{2}$                       D.  $3\sqrt{2}$

37. (0–1)

Wartość wyrażenia  $x^2 - 4y^2$  dla  $x = 2\sqrt{3} - 1$  i  $y = \sqrt{3} - 1$  jest równa

- A.  $4\sqrt{3} - 3$                       B.  $3\sqrt{3} - 3$                       C.  $-3$                       D.  $-6$

38. (0–1)

Zaokrąglenie liczby  $\sqrt[3]{1\frac{4}{5}} : \sqrt[3]{8\frac{1}{3}}$  do całości jest równe

- A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 4

39. (0–1)

Ile procent liczby 6 stanowi 30% liczby 5?

- A. 20%                      B. 25%                      C. 36%                      D. 40%

NWD i NWD



Film –  
rozwiązanie  
zadania



6 min



Kod: X9LCJ5  
app.nowaterzatura.pl

$a^x = a^y$ , gdy  $x = y$



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: QAM41Y  
app.nowaterzatura.pl

40. (0–2) CKE Informator 2024 PP

Dana jest liczba  $x = a - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ , gdzie  $a$  należy do zbioru liczb rzeczywistych. W rozwiązaniu zadania uwzględnij fakt, że liczby  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  oraz  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$  są niewymierne. Dokończ zdanie. Zaznacz dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich otrzymane zdanie było prawdziwe.

Liczba  $x$  jest wymierna dla

A.  $a = 5$

B.  $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 + 0,3$

C.  $a = 6$

D.  $a = -2\sqrt{6} + 12,5$

E.  $a = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - 2\sqrt{6}$

F.  $a = -\sqrt{6}$

## 41. (0–1)

Dane jest wyrażenie  $W = (a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$  określone dla dwóch dowolnych liczb rzeczywistych  $a$  i  $b$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wyrażenie $W$ można zapisać jako $W = 8ab$ .	P	F
Dla $a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$ i $b = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ wyrażenie $W$ ma wartość równą 8.	P	F

## 42. (0–1)

Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A albo B oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Wyrażenie  $\sqrt{x^2 - 10x + 25} - |5 - x|$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  przyjmuje wartość

$$|-x| = |x|$$

A.	nieujemną,	ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej $x$	1.	$\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 5 - x$ .
			2.	$\sqrt{x^2 - 10x + 25} =  5 - x $ .
B.	ujemną,		3.	$\sqrt{x^2 - 10x + 25} = x - 5$ .

43. (0–2) CKE Informator 2024 PP

Dane są liczby  $a = \sqrt{5} - 2$  oraz  $b = \sqrt{5} + 2$ . Oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{ab}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

dla podanych  $a$  i  $b$ .

## 44. (0–2)

Wiadomo, że  $\frac{1}{a} + a = 14$ . Oblicz wartość wyrażenia  $\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}$ .

45. (0–2) CKE czerwiec 2019 PP

Wykaż, że dla każdej liczby  $a > 0$  i każdej liczby  $b > 0$  prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$$

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

Film –  
rozwiązanie  
zadania

4 min



Kod: D6NZ6J

app.nowaterazmatura.pl

46. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest nierówność:

$$2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 6y + 13 > 0$$

47. (0–2)

CKE czerwiec 2021 PP

Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych  $a, b$  i  $c$  takich, że  $\frac{a+b}{2} > c$  i  $\frac{b+c}{2} > a$ , prawdziwa jest nierówność:

$$\frac{a+c}{2} < b$$

48. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej  $x$  liczba  $2x^2 + 4x + 10$  jest podzielna przez 8.

49. (0–2)

CKE Informator 2024 PP

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczba  $(3n+5)^2 + 11n^2 - 18$  przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.

50. (0–3)

Wyrażenie  $(x+3y)^2 - (x+3y)(3y-x) - (x-3y)^2 - y(6x-9y)$  doprowadź do prostszej postaci, a następnie sprawdź, czy jego wartość dla  $x = -\sqrt{2}$  i  $y = \frac{1}{3}$  jest liczbą ujemną.

51. (0–3)

Dane są liczby  $x = \frac{3^{11} + 27^4}{4 \cdot 9^4}$  i  $y = \sqrt{\sqrt{4\sqrt{81}} + \sqrt{25\sqrt{16}} + \sqrt[3]{\sqrt{64}}}$ . Porównaj ze sobą liczby  $2x^{-1}$  i  $y^{-2}$ .

52. (0–3)

Uporządkuj podane liczby w kolejności rosnącej.

$$a = \sqrt[3]{2\frac{10}{27}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}, \quad b = -0,5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \quad c = \sqrt[3]{-\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)^2}, \quad d = \frac{0,3^{-1} \cdot 0,4^2}{2,5^{-1}}$$

53. (0–4)

Dwa równoległe boki kwadratu wydłużono o 25%, a pozostałe dwa – skrócono o  $p\%$ . Powstał prostokąt, którego pole jest o 20% większe od pola kwadratu. Oblicz  $p$ .

54. (0–3)

Dane są zbiory  $A = (-\infty; -2) \cup [3; \infty)$  oraz  $B = [-5; 3]$ . Wyznacz zbiory: $C$  – będący częścią wspólną zbiorów  $A$  i  $B$ , $D$  – będący różnicą zbiorów  $B$  i  $A$ .Ile liczb postaci  $\frac{k}{2}$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą, należy do zbioru  $D$ ?

55. (0–4)

Ile rozwiązań ma równanie  $|x| + \sqrt{2} = 2 - m$  dla  $m = \sqrt{2}$ , a ile – dla  $m = \frac{1}{2}$ ? Odpowiedź uzasadnij.Film –  
rozwiązanie  
zadania

3 min



Kod: 5J9LR4

app.nowaterazmatura.pl

Film –  
rozwiązanie  
zadania

5 min



Kod: 3G3Z5W

app.nowaterazmatura.pl

Film –  
rozwiązanie  
zadania

6 min



Kod: DU92E7

app.nowaterazmatura.pl

Film –  
rozwiązanie  
zadania

3 min



Kod: AYCCYQ

app.nowaterazmatura.pl

Film –  
rozwiązanie  
zadania

2 min



Kod: MGFPTY

app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

56. (0–4)

Wykaż, że liczba  $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$  jest całkowita.

57. (0–5)

Wiadomo, że  $|1+3a| + \sqrt{2} \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{12-8\sqrt{2}} - \frac{1}{2}|5-4\sqrt{2}|$ ,  $c = \sin 390^\circ + \cos 540^\circ$ ,  $d = \sqrt{2}^{\log_2 \frac{1}{9}}$ . Uporządkuj liczby  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  w kolejności rosnącej.58. Dane jest równanie  $|mx| + |m| = 4$ , w którym  $x$  jest niewiadomą i  $m$  jest różne od 0.

58.1. (0–2)

Udowodnij, że dla  $m = 2 - \sqrt{2}$  suma kwadratów rozwiązań tego równania jest równa  $34 + 24\sqrt{2}$ .

58.2. (0–2)

Dla jakich wartości parametru  $m$  podane równanie ma dwa rozwiązania?

59. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej liczby  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  zachodzi nierówność  $\frac{9x^4+1}{x^2} \geq 6$ .

60. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$  i  $y$  prawdziwa jest nierówność:

$$(x+1)(x+2) + (y+1)(y+2) + 1 \geq (x+2)(y+2)$$

61. (0–3) CKE maj 2023 PRLiczby rzeczywiste  $x$  oraz  $y$  spełniają jednocześnie równanie  $x + y = 4$  i nierówność  $x^3 - x^2y \leq xy^2 - y^3$ . Wykaż, że  $x = 2$  oraz  $y = 2$ .

62. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x$ ,  $y$  prawdziwa jest nierówność:

$$13x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$$

63. (0–4)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich  $a$ ,  $b$  zachodzi nierówność:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

64. (0–3) CKE maj 2025 PRWykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $a$  i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej  $b$  takich, że  $b \neq \frac{1}{2}a$ , prawdziwa jest nierówność:

$$(a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

→ Odpowiedzi  
s. 144Film –  
rozwiązanie  
zadania

7 min

Kod: 3FLSSL  
app.nowaterazmatura.plFilm –  
rozwiązanie  
zadania

4 min

Kod: A8CLYX  
app.nowaterazmatura.plFilm –  
rozwiązanie  
zadania

6 min

Kod: AT8W32  
app.nowaterazmatura.pl

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

65. Wyrażenie  $a^4 + 4b^4$  można rozłożyć na czynniki w następujący sposób:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

65.1. (0–2)

Skorzystaj z powyższej procedury i rozłóż na czynniki wyrażenie  $a^4 + b^4$ .

65.2. (0–2)

Wykorzystaj rozkład wyrażenia  $a^4 + 4b^4$  na czynniki i udowodnij, że liczba  $3^{16} + 2^{18}$  jest liczbą złożoną.

66. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej  $k$  liczba  $(k^2 - 1)(k^2 + 2k)$  jest podzielna przez 24.

67. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej  $k$  liczba  $(k^3 + k^2)(k^2 + 3k + 2)(k + 2)$  jest podzielna przez 36.

68. (0–3)

Liczby  $a$  i  $b$  są dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi, niepodzielnymi przez 3. Wykaż, że reszta z dzielenia przez 3 liczby  $a^3 + b^2$  wynosi 2.

69. (0–3)

Liczby  $x$  i  $y$  są naturalne, parzyste oraz niepodzielne przez 4. Udowodnij, że liczba  $x^3 + y^3$  jest podzielna przez 4.

70. (0–3)

Udowodnij, że jeżeli liczba naturalna  $n$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to liczba postaci  $n^3 + 2n^2 + 2n + 6$  przy dzieleniu przez 3 również daje resztę 2.

71. (0–3)

Wykaż, że iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych podzielnych przez 7 jest liczbą podzielną przez 2058.

72. (0–3) CKE maj 2018 PR

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej  $k$  i dla każdej liczby całkowitej  $m$  liczba  $k^3m - km^3$  jest podzielna przez 6.

73. (0–2)

Rozwiąż nierówność  $\binom{n}{3} - 2\binom{n-1}{2} \leq 0$ .

74. (0–2)

Rozwiąż równanie  $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = 64$ .

75. (0–3) CKE Zbiór zadań PR

W rozwinięciu wyrażenia  $(a + b)^n$  dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  suma współczynników przy wyrazach  $a^{n-2}b^2$  oraz  $a^{n-1}b$  jest równa 66. Oblicz  $n$ .



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: 4XA3ZE

app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



4 min



Kod: 47535C

app.nowaterazmatura.pl

## 2. Funkcje. Funkcja liniowa

**Funkcją**  $f$  ze zbioru  $X$  w zbiór  $Y$  ( $f: X \rightarrow Y$ ) nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi  $x \in X$  dokładnie jednego elementu  $y \in Y$ .

Zbiór  $X$  nazywamy **dziedzina** funkcji  $f$ , a jego elementy – **argumentami** funkcji  $f$ .

**Zbiór wartości** funkcji  $f: X \rightarrow Y$  to zbiór tych wszystkich  $y \in Y$ , dla których istnieje taki argument  $x \in X$ , że  $f(x) = y$ .

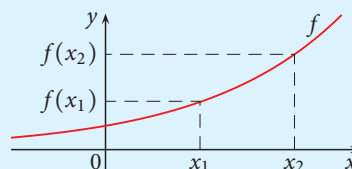
Dziedzinę funkcji  $f$  oznaczamy przez  $D$  lub  $D_f$ , a zbiór wartości funkcji  $f$  – przez  $f(D)$  lub  $f(D_f)$ .

**Miejscem zerowym** funkcji  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy taki argument  $x$ , dla którego  $f(x) = 0$ .

Niech  $X \subset \mathbb{R}$ . Funkcję  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  nazywamy:

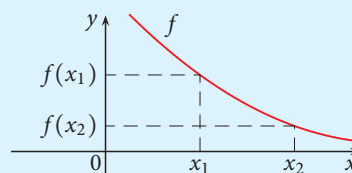
- **rosnącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) < f(x_2)$$



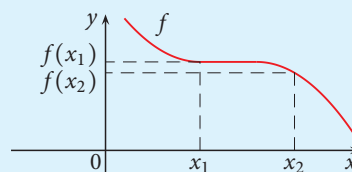
- **malejącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) > f(x_2)$$



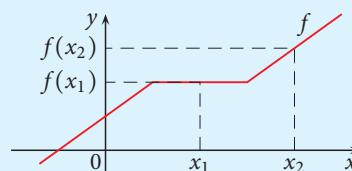
- **nierosnącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \geq f(x_2)$$



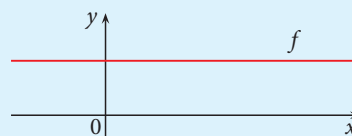
- **niemalejącą** w zbiorze  $X$ , jeśli dla dowolnych argumentów  $x_1, x_2 \in X$  spełniony jest warunek:

$$\text{jeśli } x_1 < x_2, \text{ to } f(x_1) \leq f(x_2)$$



- **stałą** w zbiorze  $X$ , jeśli istnieje taka liczba  $c$ , że dla dowolnego  $x \in X$  zachodzi równość:

$$f(x) = c$$



Funkcję  $f$  nazywamy rosnącą (odpowiednio: malejącą, nierosnącą, niemalejącą, stałą), gdy jest ona rosnąca (odpowiednio: malejąca, nierosnąca, niemalejąca, stała) w swojej dziedzinie.

Funkcję, która jest rosnąca, malejąca, nierosnąca, niemalejąca lub stała, nazywamy **funkcją monotoniczną**.

Wzory  
matematyczne CKE



Kod: GZ4ZYN  
app.nowaterazmatura.pl

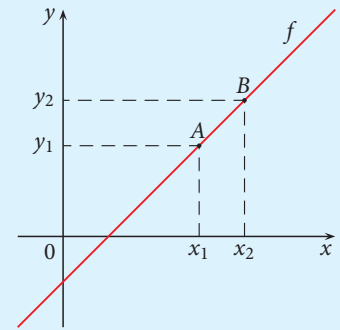
## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

**Funkcją liniową** nazywamy funkcję określoną wzorem  $f(x) = ax + b$  dla  $x \in \mathbb{R}$ , gdzie  $a$  i  $b$  są stałymi.

**Wykresem funkcji liniowej** jest prosta. Liczbę  $a$  nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** prostej  $y = ax + b$ .

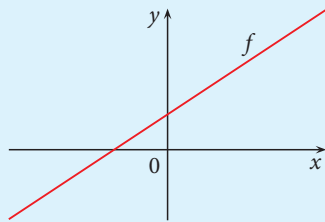
Współczynnik kierunkowy prostej  $y = ax + b$  przechodzącej przez dwa różne punkty  $A = (x_1, y_1)$  i  $B = (x_2, y_2)$  takie, że  $x_1 \neq x_2$ , jest równy:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

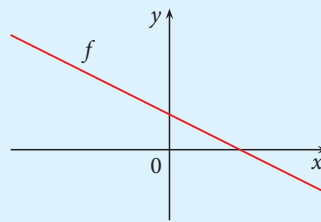


Funkcja liniowa określona wzorem  $f(x) = ax + b$  jest:

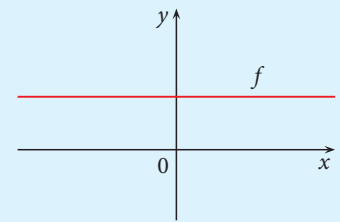
• **rosnąca** dla  $a > 0$



• **malejąca** dla  $a < 0$



• **stała** dla  $a = 0$



Proste  $y = a_1x + b_1$  i  $y = a_2x + b_2$  są:

• **równoległe** wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 = a_2$

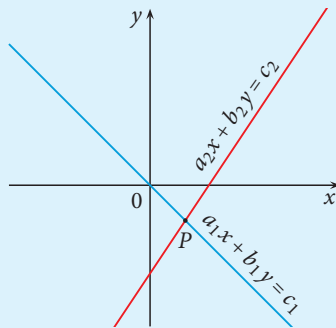
• **prostopadłe** wtedy i tylko wtedy, gdy  $a_1 \cdot a_2 = -1$

**Układ równań liniowych**

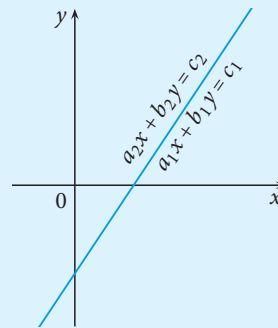
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

nazywamy:

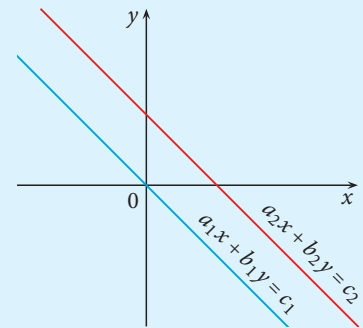
- **oznaczonym**, gdy ma dokładnie jedno rozwiązanie,
- **nieoznaczonym**, gdy ma nieskończenie wiele rozwiązań,
- **sprzecznym**, gdy nie ma rozwiązań.



**Układ oznaczony** – proste opisane równaniami tego układu przecinają się w jednym punkcie.



**Układ nieoznaczony** – oba równania opisują tę samą prostą.



**Układ spreczny** – proste opisane równaniami tego układu są równoległe i się nie pokrywają.

## Zestaw A. Zadania powtórzeniowe

1. Wyznacz dziedzinę funkcji.

a)  $f(x) = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2} + \frac{1}{x^2-9}$

c)  $f(x) = \sqrt{-x} - \sqrt{2-x}$

d)  $f(x) = \frac{\sqrt{3-0,5x}}{\sqrt{4+x}} - \frac{3}{|x|-3}$

2. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji.

a)  $f(x) = \sqrt{3-x} - 3\sqrt{x+1}$

b)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}\sqrt{2x+8}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3. Dana jest funkcja  $f(x) = x - |x|$ . Zapisz wzór funkcji  $g$  i naszkicuj jej wykres.

a)  $g(x) = f(x+1)$

c)  $g(x) = -f(x) + 2$

e)  $g(x) = |f(x)|$

b)  $g(x) = f(-x)$

d)  $g(x) = -f(-x)$

f)  $g(x) = f(|x|)$

4. Funkcja  $f$  określona w przedziale  $[-6; 6]$  dana jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{dla } x \in [-6; -3] \\ 1-x & \text{dla } x \in (-3; 3) \\ x-5 & \text{dla } x \in [3; 6] \end{cases}$$

Narysuj wykres funkcji  $h(x) = f(1-x)$  i określ jej dziedzinę.5. Narysuj wykresy funkcji  $f$  oraz  $g(x) = f(x-2)$ .

a)  $f(x) = \frac{|x|}{x}$

b)  $f(x) = x - 2\sqrt{x^2}$

c)  $f(x) = ||x| - 2|$

6. Wyznacz wzór funkcji liniowej  $f$ , która dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  spełnia warunek:

a)  $f(x+1) = 2x - 3$ ,

b)  $f(-x+3) = x + 5$ ,

c)  $f(2x-4) = x - 3$ .

7. Dla jakich wartości parametru  $m$  rozwiązaniem układu równań jest para liczb  $(x, y)$  spełniająca nierówność  $x + y \geq 1$ ?

a)  $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - y = 4 \end{cases}$

b)  $\begin{cases} 2x + y = m + 1 \\ 6x - 3y = m - 2 \end{cases}$

c)  $\begin{cases} my - 9x = -4 \\ mx - y = m \end{cases}$

8. a) Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami przeciwnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie  $(2, 4)$  i wraz z osią  $x$  ograniczają trójkąt o polu 12. Wyznacz wzory tych funkcji.b) Miejsca zerowe dwóch funkcji liniowych są liczbami odwrotnymi. Wykresy tych funkcji przecinają się w punkcie  $(0, 3)$  i wraz z osią  $x$  ograniczają trójkąt o polu 4. Wyznacz wzory tych funkcji.9. Wyznacz zbiór wartości funkcji  $f(x) = 2x + 1$ , jeśli jej dziedziną jest zbiór tych liczb rzeczywistych  $x$ , które spełniają podaną nierówność.

a)  $(2x-3)(3+2x) \leq (2x-1)^2$

c)  $(3x+5)^2 < 9(x-2)^2$

b)  $(2\sqrt{3}-x)^2 \geq (x-3\sqrt{3})^2$

d)  $3 < -4(3-x)^2 - (2x+3)(3-2x)$

→ Odpowiedzi  
s. 150Film –  
rozwiązanie  
zadania

4 min

Kod: LPYY1T  
app.nowaterazmatura.pl

$f(1-x) = f(-(x-1))$

Film –  
rozwiązanie  
zadania

2 min

Kod: QGF9C9  
app.nowaterazmatura.pl

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

10. Wyznacz miejsce zerowe funkcji  $f(x) = -2x + b$ , jeśli liczba  $b$  spełnia podane równanie.

a)  $(\sqrt{2} - b)^2 - (b - 2\sqrt{2})^2 = -6$

b)  $(\frac{1}{2}b + 2)(2 - \frac{1}{2}b) + (1 + \frac{1}{2}b)^2 = 0$

11. Wyznacz liczbę rozwiązań równania w zależności od parametru  $a$ .

a)  $1 + 4x = 6a - x$

d)  $3x + 2a = 3 + 6ax$

b)  $3x - 1 = a + 2 - ax$

e)  $2x - a = ax + 1$

c)  $(4x - 1)a = 3a + xa$

f)  $a^2x - 2 = 4x + a$

12. Rozwiąż układ równań.

a) 
$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ y + x = \frac{3(1-x) + 4}{2} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \frac{x-y-2}{2} - \frac{x+y}{4} = 1 \\ \frac{2x+y-1}{3} - \frac{x+y}{2} = 0 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} \frac{y+6}{3} + \frac{x}{4} = 5 - 2x \\ \frac{2y-3x}{4} = \frac{2}{3}y - 1 \end{cases}$$

13. Rozwiąż równanie.

a)  $||x - 2| + x| = 4$

b)  $|x - 1| + |x| = 2$

c)  $|2x + 2| + 3x = |x| + 2$

14. Rozwiąż nierówność.

a)  $|x - |x|| > 3$

d)  $|x + 5| - |x - 2| \leq 3$

b)  $||x + 1| - x| \leq 2$

e)  $|x + 3| - |x - 1| > 1$

c)  $|x - 2| - |x| < 4$

f)  $|x - 2| - |x + 3| \geq 1 + x$

15. Rozwiąż równanie.

a)  $3\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 + 10x + 25} = 10$

b)  $3\sqrt{x^2 + 8x + 16} + \sqrt{36 - 36x + 9x^2} = 18$

16. Rozwiąż nierówność.

a)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 + 4x + 1} < 4 - x$

b)  $2\sqrt{x^2 + 2x + 1} > x + 4$

17. Narysuj wykres funkcji  $f$  i określ liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ .

a)  $f(x) = |x| - |x - 1|$

c)  $f(x) = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$

b)  $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$

d)  $f(x) = ||x - 1| - 3|$

18. Boki trójkąta są zawarte w prostych  $4x - 3y + 6 = 0$ ,  $3x + 4y - 8 = 0$  oraz  $7x + y - 27 = 0$ . Wykaż, że trójkąt ten jest prostokątny. Wyznacz współrzędne jego wierzchołków.



Film –  
rozwiązanie  
zadania



7 min



Kod: B48A6Q  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



7 min

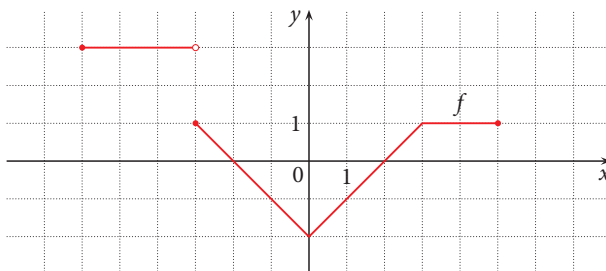


Kod: 3H8ZMS  
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw B. Przed maturą na poziomie podstawowym

→ Odpowiedzi  
s. 151

W zadaniach 19–27 wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

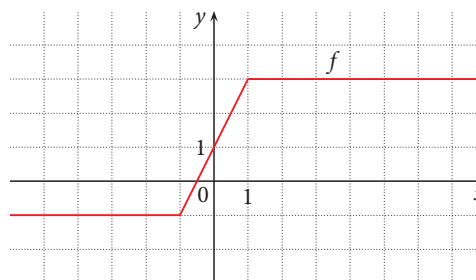
19. (0–1) CKE maj 2021 PPNa poniższym rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$  określonej w zbiorze  $[-6; 5]$ .Funkcja  $g$  jest określona wzorem  $g(x) = f(x) - 2$  dla  $x \in [-6; 5]$ . Wskaż zdanie prawdziwe.

- A. Liczba  $f(2) + g(2)$  jest równa  $-2$ .  
 B. Zbiory wartości funkcji  $f$  i  $g$  są równe.  
 C. Funkcje  $f$  i  $g$  mają te same miejsca zerowe.  
 D. Punkt  $P = (0, -2)$  należy do wykresów funkcji  $f$  i  $g$ .

20. (0–1)

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji  $f$ . Funkcja  $g$  dana jest wzorem:

$$g(x) = f(x) + b$$

dla pewnego parametru  $b$ . Zbiorem wartości funkcji  $g$  jest przedział  $[-12; -8]$ , jeśli

- A.  $b = -8$                       C.  $b = -11$   
 B.  $b = -10$                     D.  $b = -12$

21. (0–1)

Jeśli funkcja  $f$  jest malejąca, to spełniona jest nierówność

- A.  $f(1 - \sqrt{3}) < f(\sqrt{2} - 2)$                       C.  $f(2 - \sqrt{2}) > f(1 - \sqrt{3})$   
 B.  $f(2 - \sqrt{2}) > f(\sqrt{2} - 2)$                       D.  $f(2 - \sqrt{2}) > f(\sqrt{3} - 1)$

22. (0–1)

Funkcja  $f$  przyjmuje wartości ujemne w przedziale  $(-3; 1)$ . Wynika stąd, że funkcja  $g(x) = f(x - 5)$  przyjmuje wartość ujemną dla

- A.  $x = -5$                       B.  $x = -3$                       C.  $x = 1$                       D.  $x = 4$

23. (0–1) CKE maj 2022 PPMiejscem zerowym funkcji liniowej  $f$  określonej wzorem  $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 3) + 5$  jest liczba

- A.  $-3$                       B.  $\frac{9}{2}$                       C.  $5$                       D.  $12$

## POWTÓRZENIE DZIAŁ PO DZIALE

24. (0–1) CKE czerwiec 2019 PP

Funkcja  $f$  jest określona dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  wzorem  $f(x) = (m\sqrt{5} - 1)x + 3$ . Ta funkcja jest rosnąca dla każdej liczby  $m$  spełniającej warunek

- A.  $m > \frac{1}{\sqrt{5}}$       B.  $m > 1 - \sqrt{5}$       C.  $m < \sqrt{5} - 1$       D.  $m < \frac{1}{\sqrt{5}}$

25. (0–1) CKE maj 2021 PP

Proste o równaniach  $y = 3x - 5$  oraz  $y = \frac{m-3}{2}x + \frac{9}{2}$  są równoległe, gdy

- A.  $m = 1$       B.  $m = 3$       C.  $m = 6$       D.  $m = 9$

26. (0–1) CKE maj 2019 PP

Para liczb  $x = 2$  i  $y = 2$  jest rozwiązaniem układu równań  $\begin{cases} ax + y = 4 \\ -2x + 3y = 2a \end{cases}$  dla

- A.  $a = -1$       B.  $a = 1$       C.  $a = -2$       D.  $a = 2$

27. (0–1)

Wykres funkcji  $f(x) = x^2$  przesunięto o 2 jednostki w prawo, a następnie otrzymany wykres przesunięto o 3 jednostki do góry. Uzyskano w ten sposób wykres funkcji  $g$ , której wzór to

- A.  $g(x) = x^2 - 4x + 7$       C.  $g(x) = x^2 + 4x + 1$   
 B.  $g(x) = x^2 - 4x + 1$       D.  $g(x) = x^2 + 4x + 7$

28. (0–2) CKE maj 2023 PP

Dany jest prostokąt o bokach długości  $a$  i  $b$ , gdzie  $a > b$ . Obwód tego prostokąta jest równy 30. Jeden z boków prostokąta jest o 5 krótszy od drugiego.

Uzupełnij zdanie. Wybierz dwie właściwe odpowiedzi spośród oznaczonych literami A–F i wpisz te litery w wykropkowanych miejscach.

Zależności między długościami boków tego prostokąta zapisano w układach równań oznaczonych literami: ..... oraz .....

- A.  $\begin{cases} 2ab = 30 \\ a - b = 5 \end{cases}$       C.  $\begin{cases} 2(a + b) = 30 \\ b = a - 5 \end{cases}$       E.  $\begin{cases} 2a + 2b = 30 \\ a - b = 5 \end{cases}$   
 B.  $\begin{cases} 2a + b = 30 \\ a = 5b \end{cases}$       D.  $\begin{cases} 2a + 2b = 30 \\ b = 5a \end{cases}$       F.  $\begin{cases} a + b = 30 \\ a = b + 5 \end{cases}$

29. (0–1)

Dane są funkcje liniowe  $f(x) = 2x - 1$  oraz  $g(x) = -2x - 2$ .

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Wykresy funkcji $f$ i $g$ przecinają się w punkcie leżącym w III ćwiartce układu współrzędnych.	P	F
Wykresy funkcji $f$ i $g$ są prostymi prostopadłymi.	P	F

30. (0–1)

Dana jest funkcja liniowa  $f(x) = (2m - 2)x - (m + 1)x + 6$ .

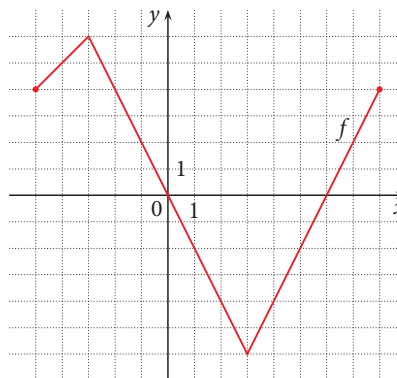
Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. Wybierz odpowiedź A, B albo C oraz jej uzasadnienie 1., 2. albo 3.

Funkcja  $f$  jest stała dla

A.	$m = -1$ ,	ponieważ	1.	wartość wyrażenia $2m - 2$ wynosi 0.
B.	$m = 1$ ,		2.	wartość wyrażenia $m - 3$ wynosi 0.
C.	$m = 3$ ,		3.	wartość wyrażenia $m + 1$ wynosi 0.

31. CKE Informator 2024 PP

Dana jest funkcja  $y = f(x)$ . Wykres tej funkcji przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych  $(x, y)$ .



31.1. (0–1)

Zapisz w miejscu wykropkowanym zbiór wszystkich argumentów, dla których prawdziwa jest nierówność  $f(x) > 2$ .

.....

31.2. (0–1)

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

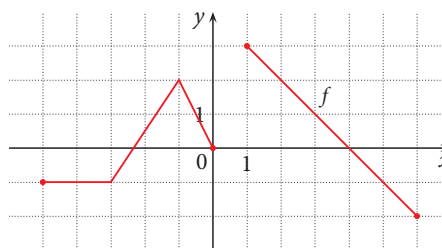
Funkcja  $f$  jest malejąca w przedziale

- A.  $[-5; -3]$       B.  $[3; 8]$       C.  $[0; 6]$       D.  $[-3; 3]$

32. (0–4)

Z wykresu funkcji  $f$  na rysunku obok odczytaj:

- dziedzinę tej funkcji,
- zbiór wartości funkcji,
- rozwiązanie równania  $f(x) = 2$ ,
- zbiór rozwiązań nierówności  $f(x) \geq -1$ .



33. (0–4)

Dane są proste  $k: y = -\frac{4}{3}x + 5$ ,  $l: y = \frac{4}{3}x + 5$ . Napisz równanie prostej  $m$  przechodzącej przez punkt  $(0, -3)$ , równoległej do prostej  $k$ . Oblicz pole figury ograniczonej prostymi  $l$  i  $m$  oraz osią  $y$ .

34. (0–4)

Dana jest funkcja  $f(x) = (2 - a)x + 4$ . Wyznacz  $a$ , jeśli wiadomo, że:

- punkt  $A = (-2, 6)$  należy do wykresu funkcji  $f$ ,
- wykresy funkcji  $f$  oraz  $g(x) = -2x + 2$  przecinają oś  $x$  w tym samym punkcie.



Film –  
rozwiązanie  
zadania



2 min



Kod: 3RPEUM  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: H7D1D7  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



5 min



Kod: WTYV7M  
app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



3 min



Kod: J7Q4UH  
app.nowaterazmatura.pl

→ Odpowiedzi  
s. 152

### Zestaw C. Przed maturą na poziomie rozszerzonym

35. (0–3)

Dla jakiej wartości parametru  $m$  rozwiązaniem równania  $|x - 1| = m + 2$  jest para liczb o przeciwnych znakach?

36. (0–3)

Naszkcij wykresy dwóch funkcji:  $f$  oraz  $g(x) = f(x - 1)$ , jeżeli wiadomo, że:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & \text{dla } x \leq -1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{dla } x > -1 \end{cases}$$

Z wykresu odczytaj rozwiązanie nierówności  $g(x) \geq 0$ .

37. (0–4)

Dla jakich wartości parametru  $m$  proste  $(m + 1)x - my - 4 = 0$  i  $3x + (2 - m)y - 6m = 0$  przecinają się w punkcie leżącym na osi  $x$ ?

38. (0–4)

Dana jest funkcja  $f(x) = |x + 4| - |x - 2|$ , gdzie  $x \in \mathbb{R}$ .

a) Narysuj wykres tej funkcji i podaj jej miejsca zerowe.

b) Określ liczbę rozwiązań równania  $f(x) = m$  w zależności od parametru  $m$ .

39. (0–4)

Dane są funkcje liniowe  $f(x) = 2x + m$  oraz  $g(x) = \frac{1}{3}x - 2$ . Oblicz, dla jakich wartości parametru  $m$  wykresy funkcji  $f$  i  $g$  mają dokładnie jeden punkt wspólny o pierwszej współrzędnej dodatniej, a drugiej ujemnej.

40. (0–4)

Rozwiąż nierówność  $|x - 2| + \sqrt{x^2 + 2x + 1} < 5$ .

41. (0–4)

Rozwiąż nierówność  $|x + \cos 60^\circ| + |x - \operatorname{tg} 45^\circ| \geq 4$ .

42. (0–4) CKE maj 2023 PR

Rozwiąż nierówność

$$\sqrt{x^2 + 4x + 4} < \frac{25}{3} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

Wskazówka: skorzystaj z tego, że  $\sqrt{a^2} = |a|$  dla każdej liczby rzeczywistej  $a$ .

$m \neq -1$



Film –  
rozwiązanie  
zadania



5 min



Kod: XDGZWM

app.nowaterazmatura.pl



Film –  
rozwiązanie  
zadania



6 min



Kod: QYCKJ4

app.nowaterazmatura.pl

# **Odpowiedzi i modele rozwiązań**

## Powtórzenie dział po dziale

## 1. Liczby rzeczywiste i wyrażenia algebraiczne

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw A



Kod: PGGMYW  
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw A – odpowiedzi

1. a) 6 b) 8 c)  $4\sqrt{2}+2$  d) 0

4. a)  $-2(3+2\sqrt{3})$

b)  $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5}$

c)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}-2}{2}$

d)  $\frac{2+5\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{6}}{23}$

5. a)  $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$

b)  $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1)$

c)  $\frac{2}{11}(4-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$

d)  $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$

6. a)  $\frac{1}{x}$  b)  $\sqrt{x}-\sqrt{y}$

c)  $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$  d) 2

8. a)  $10+6\sqrt{3}$  b)  $26+15\sqrt{3}$

c)  $45-29\sqrt{2}$  d)  $37-30\sqrt{3}$

9. a)  $2x^3+9x^2+15x+9$

b)  $2x^3-15x^2+39x-35$

c)  $-24x^2-2$

d)  $81x^2+27x+9$

10. a) -13 b) 8 c) 209 d) 456

12. a)  $99\sqrt{2}-63\sqrt{3}$  b)  $30+12\sqrt{6}$

13. a) 1 b) 7 c) 21 d) 35

e) 35 f) 21 g) 7 h) 1

15. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1  
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

16. a)  $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

b)  $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

c)  $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

d)  $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

e)  $a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

f)  $a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$

g)  $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

h)  $a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7$

17. a)  $29\sqrt{2}+41$  b)  $29\sqrt{2}-41$

c)  $209\sqrt{3}+362$  d)  $209\sqrt{3}-362$

18. a) 80 b) 2160 c) -560

19. a) -4 b) 32 c) 60

24. a) 64 b) 12

25. a)  $a=6, b=0$  lub  $a=10, b=8$

b)  $a=-8, b=-7$  lub  $a=-8, b=7$  lub

$a=-4, b=-1$  lub  $a=-4, b=1$  lub

$a=4, b=-1$  lub  $a=4, b=1$  lub

$a=8, b=-7$  lub  $a=8, b=7$

26.  $A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = [\frac{1}{2}; 1]$

27.  $A \setminus B = [-3; 5]$

29. a)  $x \in \{-4, 4\}$  b) brak rozwiązań

c)  $x \in \{-6, -2, 0, 4\}$

30. a)  $x \in [-1; 5]$

b)  $x \in (-\infty; -1) \cup (7; \infty)$

c)  $x \in (-\infty; -8) \cup (-2; 2) \cup (8; \infty)$

## Zestaw B – odpowiedzi

31. B 32. B 33. D 34. A 35. C 36. C 37. A

38. A 39. B 40. BD 41. PP 42. A2

43. 1

44. 4

50. jest liczbą ujemną

51.  $2x^{-1} > y^{-2}$

52.  $c < b < a < d$

53.  $p=4$

54.  $C = [-5; -2) \cup \{3\},$

$D = [-2; 3);$  dziesięć liczb

55. 0 rozwiązań dla  $m = \sqrt{2},$

2 rozwiązania dla  $m = \frac{1}{2}$

## Zestaw C – odpowiedzi

57.  $c < a < d < b$

58.2.  $m \in (-4; 4) \setminus \{0\}$

65.1.  $(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)$

73.  $n \in \{3, 4, 5, 6\}$

74.  $n=8$

75.  $n=11$

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw B



Kod: QR6646  
app.nowaterazmatura.pl

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw C



Kod: YXR35Y  
app.nowaterazmatura.pl

## Zestaw B – modele rozwiązań zadań otwartych

Numer zadania	Etapy rozwiązania zadania (każdy etap za 1 punkt)
43	Przekształcenie wyrażenia $\frac{ab}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$ do postaci $ab$
	Obliczenie wartości iloczynu $ab$ : $ab = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) = 1$
44	Skorzystanie ze wzoru skróconego mnożenia: $\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a}\right)^2 = \frac{1}{a} + 2 + a$
	Obliczenie wartości wyrażenia: $\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \sqrt{\frac{1}{a} + a + 2} = \sqrt{16} = 4$
45	Zapisanie nierówności $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ w postaci: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $(a-b)^2 \geq 0$ i stwierdzenie, że kwadrat dowolnej liczby jest zawsze nieujemny
46	Zapisanie nierówności $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x + 6y + 13 > 0$ w postaci: $(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) + 3 > 0$
	Zapisanie nierówności w postaci: $(x-y)^2 + (x+1)^2 + (y+3)^2 + 3 > 0$ i stwierdzenie, że suma kwadratów dowolnych liczb i liczby dodatniej jest zawsze dodatnia
47	Zapisanie nierówności: $\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} > c + a$
	Zapisanie nierówności $\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} > c + a$ w postaci: $\frac{a+c}{2} < b$
48	Zapisanie liczby $2x^2 + 4x + 10$ dla $x = 2n + 1$ , gdzie $n \in \mathbb{N}$ : $2(2n+1)^2 + 4(2n+1) + 10$
	Przekształcenie wyrażenia do postaci: $8n^2 + 16n + 16 = 8(n^2 + 2n + 2)$ i zapisanie wniosku: Liczba ta jest podzielna przez 8.
49	Zapisanie liczby $(3n+5)^2 + 11n^2 - 18$ w postaci: $5(4n^2 + 6n) + 5 + 2$
	Zauważenie, że $5(4n^2 + 6n) + 5 + 2 = 5(4n^2 + 6n + 1) + 2$ , i zapisanie wniosku: Liczba ta przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.
50	Skorzystanie ze wzorów skróconego mnożenia: $(x^2 + 6xy + 9y^2) - (9y^2 - x^2) - (x^2 - 6xy + 9y^2) - (6xy - 9y^2)$ i redukcja wyrazów podobnych: $x^2 + 6xy$
	Podstawienie wartości $x = -\sqrt{2}$ i $y = \frac{1}{3}$ do wyrażenia $x^2 + 6xy$ : $(-\sqrt{2})^2 + 6 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot \frac{1}{3} = 2 - 2\sqrt{2}$
	Podanie odpowiedzi: $2\sqrt{2} > 2$ , zatem $2 - 2\sqrt{2}$ jest liczbą ujemną.
51	Obliczenie $x$ : $x = 27$ oraz $y$ : $y = 3\sqrt{2}$
	Obliczenie $2x^{-1}$ oraz $y^{-2}$ : $2x^{-1} = \frac{2}{27}$ , $y^{-2} = \frac{1}{18}$
	Porównanie liczb i podanie odpowiedzi: $2x^{-1} > y^{-2}$

## 2. Funkcje. Funkcja liniowa

Rozwiązania  
zadań –  
zestaw A



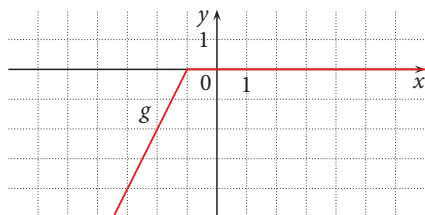
Kod: 5MYUH8  
app.nowaterazmatura.pl

### Zestaw A – odpowiedzi

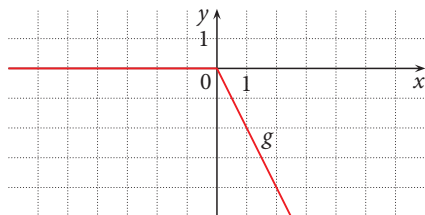
1. a)  $[-1; 4]$  b)  $[1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; 3) \cup (3; \infty)$   
c)  $(-\infty; 0]$  d)  $(-4; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; 6]$

2. a)  $D = [-1; 3], x = -\frac{3}{5}$   
b)  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}, x = 0, x = 4\sqrt{2}$

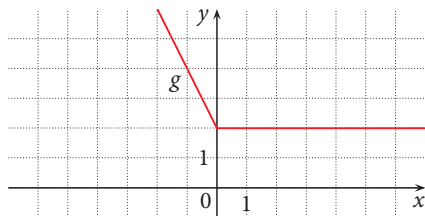
3. a)  $g(x) = x + 1 - |x + 1|$



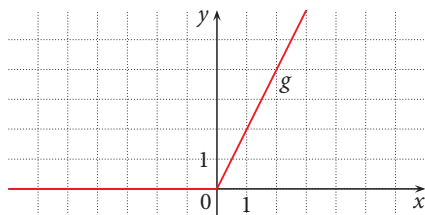
- b)  $g(x) = -x - |x|$



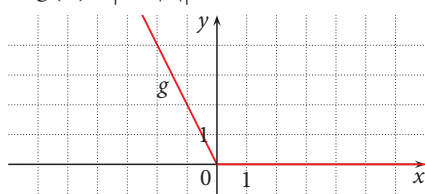
- c)  $g(x) = |x| - x + 2$



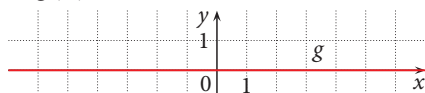
- d)  $g(x) = |x| + x$



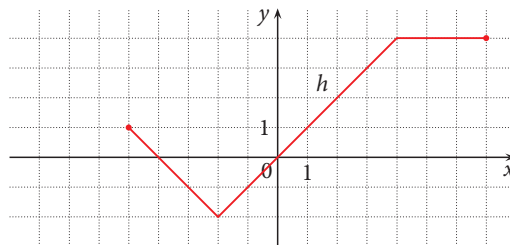
- e)  $g(x) = |x - |x||$



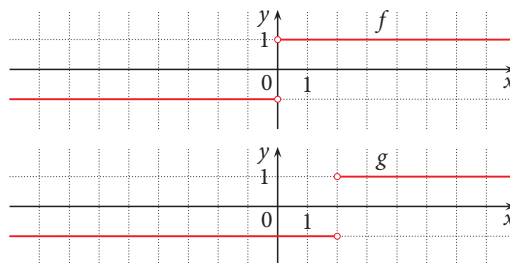
- f)  $g(x) = 0$



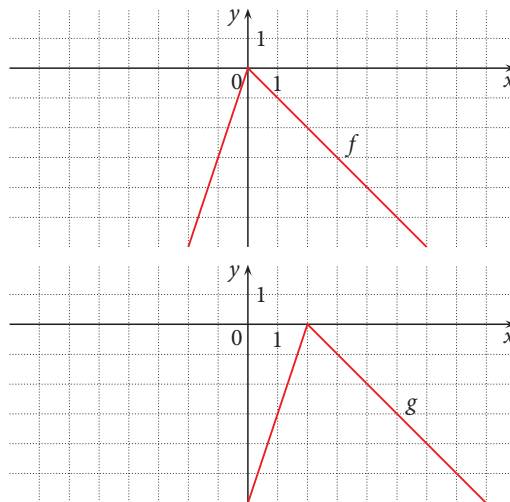
4.  $D_h = [-5; 7]$



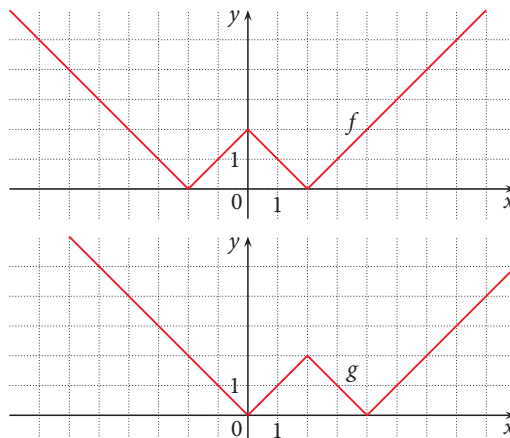
5. a)



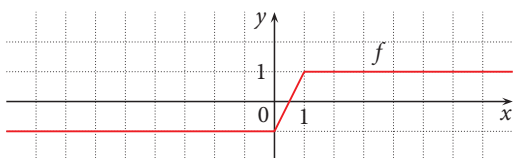
- b)



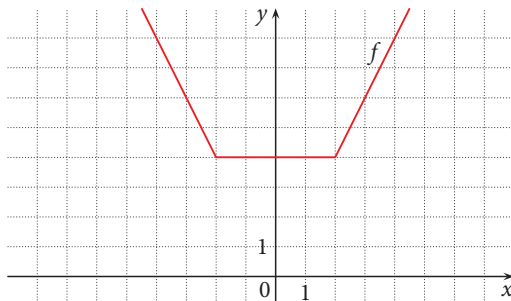
- c)



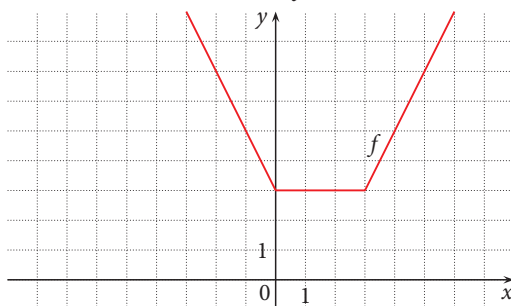
6. a)  $f(x) = 2x - 5$   
 b)  $f(x) = -x + 8$   
 c)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$
7. a)  $m \in [3 - \sqrt{6}; 3 + \sqrt{6}]$   
 b)  $m \in [\frac{1}{8}; \infty)$   
 c)  $m \in (-3; -1] \cup (3; \infty)$
8. a)  $y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$ ,  $y = -4x + 12$   
 b)  $y = x + 3$  i  $y = 9x + 3$   
 lub  $y = -x + 3$  i  $y = -9x + 3$
9. a)  $(-\infty; 6]$  b)  $[5\sqrt{3} + 1; \infty)$   
 c)  $(-\infty; \frac{4}{3})$  d)  $(5; \infty)$
10. a) 0 b) -2,5
11. a) 1 rozwiązanie dla  $a \in \mathbb{R}$   
 b) 1 rozwiązanie dla  $a \neq -3$ ,  
 nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = -3$   
 c) 1 rozwiązanie dla  $a \neq 0$ ,  
 nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = 0$   
 d) 0 rozwiązań dla  $a = \frac{1}{2}$ ,  
 1 rozwiązanie dla  $a \neq \frac{1}{2}$   
 e) 0 rozwiązań dla  $a = 2$ ,  
 1 rozwiązanie dla  $a \neq 2$   
 f) 0 rozwiązań dla  $a = 2$ ,  
 1 rozwiązanie dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ ,  
 nieskończenie wiele rozwiązań dla  $a = -2$
12. a)  $x = 2$ ,  $y = -\frac{3}{2}$   
 b)  $x = -1$ ,  $y = -3$   
 c)  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y = 0$
13. a)  $x = 3$  b)  $x \in \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$  c)  $x = 0$
14. a)  $x \in (-\infty; -\frac{3}{2})$  b)  $x \in [-\frac{3}{2}; \infty)$   
 c)  $x \in \mathbb{R}$   
 d)  $x \in (-\infty; 0]$   
 e)  $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$  f)  $x \in (-\infty; -\frac{2}{3}]$
15. a)  $x = 2$ ,  $x = \frac{7}{2}$   
 b)  $x \in [-4; 2]$
16. a)  $x \in (-\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$   
 b)  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$
17. a) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ ,  
 1 rozwiązanie dla  $m \in (-1; 1)$ ,  
 nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m \in \{-1, 1\}$



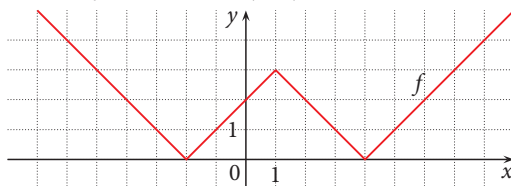
- b) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; 4)$ ,  
 2 rozwiązania dla  $m \in (4; \infty)$ ,  
 nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m = 4$



- c) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; 3)$ ,  
 2 rozwiązania dla  $m \in (3; \infty)$ ,  
 nieskończenie wiele rozwiązań dla  $m = 3$



- d) 0 rozwiązań dla  $m \in (-\infty; 0)$ ,  
 2 rozwiązania dla  $m \in \{0\} \cup (3; \infty)$ ,  
 3 rozwiązania dla  $m = 3$ ,  
 4 rozwiązania dla  $m \in (0; 3)$



18.  $(0, 2)$ ,  $(4, -1)$ ,  $(3, 6)$

### Zestaw B – odpowiedzi

19. A 20. C 21. D 22. D 23. D 24. A 25. D  
 26. B 27. A 28. CE 29. PF 30. C2

- 31.1.  $x \in [-5; -1) \cup (7; 8]$

31.2. D

32. a)  $[-5; 0] \cup [1; 6]$

b)  $[-2; 3]$

c)  $x = -1$ ,  $x = 2$

d)  $[-5; 0] \cup [1; 5]$

33.  $y = -\frac{4}{3}x - 3$ ,  $P = 12$

34. a)  $a = 3$  b)  $a = 6$

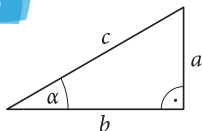
Rozwiązania  
 zadań –  
 zestaw B



Kod: RJFCAW  
 app.nowaterazmatura.pl

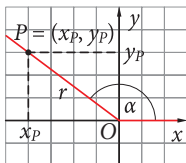
## Funkcje trygonometryczne kąta ostrego

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$



## Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

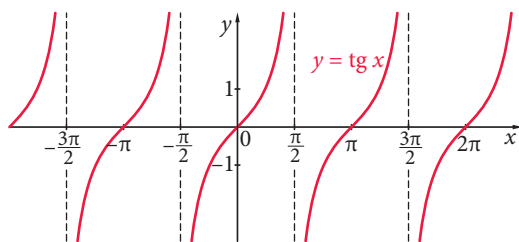
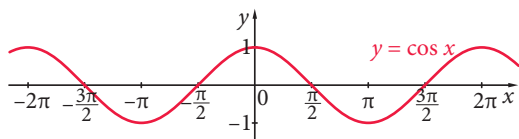
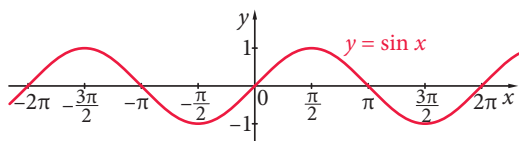
- $r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$   
 $\sin \alpha = \frac{y_p}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x_p}{r}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_p}{x_p}$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$



## Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych kątów

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

## Wykresy funkcji trygonometrycznych



## Wybrane wzory redukcyjne

- $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$
- $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$
- $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$
- $\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$
- $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$

## Wzory trygonometryczne

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$
- $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

## Ciąg arytmetyczny

- $a_{n+1} = a_n + r$
- $a_n = a_1 + (n-1)r, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$  dla  $n \geq 2$
- $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$

## Ciąg geometryczny

- $a_{n+1} = a_n \cdot q$
- $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$  dla  $n \geq 2$
- $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ , gdy  $q \neq 1, \quad S_n = n \cdot a_1$ , gdy  $q = 1$
- Jeśli  $|q| < 1$ , to suma szeregu geometrycznego:  $S = \frac{a_1}{1-q}$ .

## Pochodne niektórych funkcji

$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = \frac{1}{x}, D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, D' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}, D = [0; \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, D' = (0; \infty)$
$f(x) = x^k, k \neq 0, k \neq 1$	$f'(x) = kx^{k-1}$

## Działania na pochodnych

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$  dla  $c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$  dla  $g(x) \neq 0$
- $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

## Równanie stycznej

Jeśli funkcja  $f$  ma pochodną w  $x_0$ , to styczna do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  ma równanie:  
 $y = ax + b$ , gdzie  $a = f'(x_0)$

## Silnia. Symbol Newtona. Dwumian Newtona

- $0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  dla  $n \in \mathbb{N}_+$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  dla  $n, k \in \mathbb{N}$  i  $k \leq n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}b^n$

## Kombinatoryka

- Liczba  $k$ -elementowych wariacji z powtórzeniami zbioru  $n$ -elementowego:  $n^k$
- Liczba  $k$ -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru  $n$ -elementowego ( $1 \leq k \leq n$ ):  $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Liczba permutacji zbioru  $n$ -elementowego:  $n!$
- Liczba  $k$ -elementowych kombinacji (podzbiorów) zbioru  $n$ -elementowego ( $0 \leq k \leq n$ ):  $\binom{n}{k}$

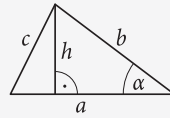
## Rachunek prawdopodobieństwa

- Klasyczna definicja prawdopodobieństwa**  
Niech  $A \subset \Omega$ . Jeśli wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, to  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .
- Własności prawdopodobieństwa**  
Dla  $A, B \subset \Omega$ :  $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1, 0 \leq P(A) \leq 1,$   
 $P(A') = 1 - P(A), P(A) \leq P(B)$  dla  $A \subset B,$   
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Prawdopodobieństwo warunkowe**  
Dla  $A, B \subset \Omega, P(B) > 0$ :  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- Prawdopodobieństwo całkowite**  
Niech  $A, B_1, \dots, B_n \subset \Omega$ . Jeśli  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j,$   
 $B_1 \cup \dots \cup B_n = \Omega$  oraz  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n,$  to  
 $P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n).$
- Wzór Bayesa**  
Jeżeli zdarzenia  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n \subset \Omega$  tworzą układ zupełny,  
 $A \subset \Omega$  i  $A \neq \emptyset$ , to dla dowolnego  $1 \leq i \leq n$  prawdziwa jest  
zależność:  $P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)}$
- Schemat Bernoulliego**  
Prawdopodobieństwo uzyskania  $k$  sukcesów w schemacie  $n$  prób Bernoulliego:  
 $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n,$   
gdzie  $p$  jest prawdopodobieństwem sukcesu, a  $q = 1 - p$  jest prawdopodobieństwem porażki w pojedynczej próbie.

## Parametry statystyczne

- Dominanta** zestawu danych to wartość występująca najczęściej, ale więcej niż raz.
- Mediana** uporządkowanego zestawu  $n$  liczb to wyraz środkowy (dla  $n$  nieparzystych) lub średnia arytmetyczna dwóch wyrazów środkowych (dla  $n$  parzystych).

## Trójkąty i czworokąty



$p$  – połowa obwodu  
 $R$  – promień okręgu opisanego na trójkącie  
 $r$  – promień okręgu wpisanego w trójkąt

### Trójkąt

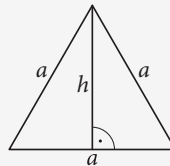
$$P = \frac{1}{2}ah$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$

$$P = \frac{abc}{4R}$$

$$P = pr$$

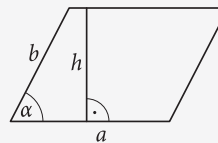
$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



### Trójkąt równoboczny

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$$

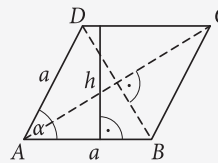
$$R = \frac{2}{3}h \quad r = \frac{1}{3}h$$



### Równoległobok

$$P = ah$$

$$P = ab \sin \alpha$$

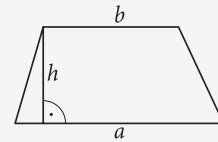


### Romb

$$P = ah$$

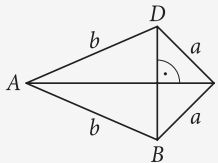
$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

$$P = a^2 \sin \alpha$$



### Trapez

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

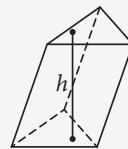


### Deltoid

$$P = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$

## Gnaniastosłup i ostrosłup

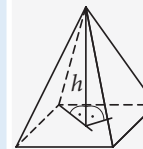
### Gnaniastosłup



$$P_c = P_b + 2P_p$$

$$V = P_p \cdot h$$

### Ostrosłup



$$P_c = P_b + P_p$$

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot h$$

### Bryły podobne

Jeżeli bryła  $F_1$  o polu powierzchni całkowitej  $P_1$  i objętości  $V_1$  jest podobna w skali  $k$  do bryły  $F_2$  o polu powierzchni całkowitej  $P_2$  i objętości  $V_2$ , to:

$$\frac{P_1}{P_2} = k^2 \quad \text{oraz} \quad \frac{V_1}{V_2} = k^3$$



I wiesz, jak zdać maturę

## ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH

ćwiczenie rozwiązywania zadań maturalnych oraz zadań CKE



## VADEMECUM

powtarzanie wiadomości  
połączone z rozwiązywaniem  
zadań różnego typu



## ARKUSZE MATURALNE

rozwiązywanie arkuszy maturalnych dopasowanych do matury

## CYFROWE WSPOMAGANIE NAUKI

- **APLIKACJA** – materiały cyfrowe zintegrowane z Vademecum, Zbiorem zadań maturalnych i Arkuszami maturalnymi, ułatwiające przygotowania do egzaminu [app.nowaterazmatura.pl](http://app.nowaterazmatura.pl)
- **SERWIS MATURALNY** – wszystkie niezbędne informacje o maturze [nowaterazmatura.pl](http://nowaterazmatura.pl)

