O nauczaniu matematyki

Michał Szurek

tom 8

Geometria

Matematyka z oddali

XXI wiek, czyli o matematyce przy kominku

Zdjęcia na okładkach: *Emilia Bojańczyk*, *Zbigniew Treppa*, *Pracownia*

Projekt graficzny: *Rafał Szczawiński*, *Pracownia*

Grafika komputerowa: *Leszek Jakubowski*

Redakcja: *Agnieszka Szulc*, *Jerzy Trzeciak*

Korekta: *Jacek Foromański*

Skład (TEX): *Joanna Szyller*

ISBN 978-83-7420-398-2

Wydawca: Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 80–309 Gdańsk, al. Grunwaldzka 413

Gdańsk 2006. Wydanie pierwsze

Druk i oprawa: Interak, Czarnków

Wszystkie książki Wydawnictwa dostępne są w sprzedaży wysyłkowej.

Zamówienia prosimy nadsyłać pod adresem:

Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe
80–876 Gdańsk 52, skr. poczt. 59
tel./fax 0 801 643 917, fax 0 58 340 63 61
tel. 0 58 340 63 60, 0 58 340 63 63
http://www.gwo.pl e-mail: gwo@gwo.pl

Spis treści

Zadanie 9. Uogólnij zadanie 7 na n przyjaciół.

Wskazówka. Na początek zmień dane na prostsze, na przykład na takie: niech punkt A będzie równo oddalony od każdego z punktów $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Z każdego z tych punktów kursują autobusy do A co godzinę i jadą godzinę do A. Każdy z przyjaciół wsiada do losowo wybranego autobusu o godzinie 8, 9 lub 10 i po dojechaniu do A czeka co najwyżej godzinę na resztę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszyscy się spotkają. Następnie komplikuj dane. W pewnym momencie przerwij obliczenia na kartce i weź komputer.

Z tego wszystkiego wynika kilka wniosków, z których najważniejszy to taki, że przestrzenie wysokich wymiarów nie są tylko zabawą, w jaką bawią się matematycy. Przestrzenie takie pojawiają się w najbardziej naturalnych rozumowaniach i sytuacjach matematycznych. Możemy wyobrazić sobie, że w zagadnieniu nie chodzi o piknik koleżeński, ale o uniknięcie zderzenia samolotów wlatujących do obszaru powietrznego w niewiadomych momentach. Wykresem sytuacji powietrznej jest wtedy pewna konfiguracja w przestrzeni o tylu wymiarach, ile samolotów wchodzi w grę. To trudno już nazwać igraszką matematyków.

Kwadrat Rynku wpisany w koło Plant,
To geometria wesoła.
W ten sposób Kraków rozwiązał
Kwadraturę koła.

Jan Izydor Sztaudynger, *Kwadratura koła*[46]

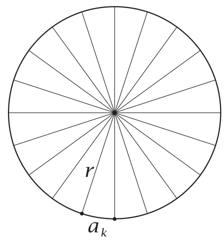
Lekcja 7. Kule

Najbardziej fascynująca jest opowieść o geometrii kuli[47]. Nie omówię tu trudnych zagadnień matematyki współczesnej, w tym nierozwiązanego od stu lat najpoważniejszego zadania topologii: hipotezy Poincarégo. Obliczmy objętość kul w przestrzeniach kolejnych wymiarów. Wymaga to obliczenia trudnych całek. Znajdziemy jednak ścieżkę, która doprowadzi nas do tego drogą elementarnych rozważań, niekiedy tylko nie całkiem uzasadnionych, za to intuicyjnie zrozumiałych.

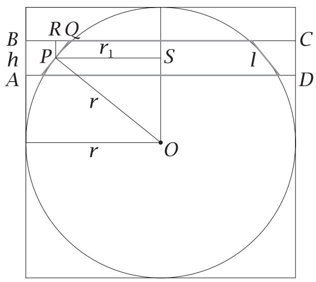
[46] [W:] *Krakowskie piórka i inne wiersze*, Wydawnictwo Literackie, Kraków 1972.

[47] Jest taka zasada wygłaszania referatów na konferencjach, nie tylko naukowych. Jeżeli wykład trwa, na przykład, godzinę zegarową, wykładowca powinien przez 55 minut mówić przystępnie i zwracać uwagę na audytorium. Wykład jest bowiem dla słuchaczy. Ale ostatnie pięć minut każdej godziny jest dla wykładowcy. Może on wtedy nie zwracać uwagi na salę i mówić, co chce. Do pewnego stopnia korzystam tu z tego prawa i zapewniam, że jest ono niegłupie.

Powierzchnię kuli nazywamy sferą. Zwiążemy najpierw n-wymiarową objętość kuli z jej powierzchnią, czyli objętością $(n-1)$-wymiarową sfery, będącej brzegiem takiej kuli. Znany trick pozwala obliczyć pole jako granicę pól pasków krzywoliniowych, otrzymanych z podziału koła na części takie jak w serku topionym. Okazuje się, że do obliczenia pola koła można to koło traktować jak trójkąt o wierzchołku w środku koła i podstawie będącej obwodem. Istotnie, jeśli obwodem koła jest $2\pi r$, to według wzoru na pole trójkąta mamy jako pole koła właśnie πr^2. Przekonuje nas to — szczególnie jeżeli przypomnimy sobie, jak się oblicza objętość ostrosłupa — że objętość kuli w wymiarze n jest równa „polu powierzchni” sfery pomnożonemu przez $\frac{1}{n} \cdot r$. Sprawdźmy: kula trójwymiarowa ma objętość $\frac{4}{3}\pi r^3$ i pole powierzchni $4\pi r^2$. Stosunek tych wielkości jest równy $\frac{1}{3}r$.



Będziemy teraz obliczać pola powierzchni sfer — czyli ich objętości $(n-1)$-wymiarowe. Jak to robił Archimedes dla zwykłej sfery? Spójrzmy na rysunek.



Trójkąty PQR i PSO są podobne, więc $\frac{r}{\frac{l}{2}} = \frac{r_1}{\frac{h}{2}}$, a zatem $rh = r_1 l$, więc także $2\pi rh = 2\pi r_1 l$. Lewa strona tej równości jest polem powierzchni bocznej walca, którego przekrojem osiowym jest prostokąt $ABCD$, prawa — polem powierzchni bocznej stożka ściętego, którego przekrojem osiowym jest widoczny na rysunku trapez o ramieniu l.

Archimedes był w stanie wykonać trudną operację myślową: przejście graniczne. Gdy podzielimy walec na wiele plasterków, do każdego zastosujemy to rozumowanie… i potem przejdziemy do granicy, to dojdziemy do wniosku, że pole powierzchni bocznej walca opisanego na sferze jest równe polu powierzchni sfery. Pole powierzchni bocznej walca o promieniu podstawy r i wysokości $2r$ wynosi $4\pi r^2$. Tyle samo wynosi zatem powierzchnia sfery. Dochodzimy zatem do wzoru na objętość kuli, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Dążymy do wyznaczenia objętości w sensie wymiaru n. Przeformułujmy to, co osiągnął Archimedes. Odcinek można traktować jako kulę wymiaru 1, składa się on bowiem z punktów odległych od środka nie więcej niż o promień.

Twierdzenie. Niech $n \geqslant 3$. Wtedy pole powierzchni kuli wymiaru n jest równe objętości kuli wymiaru $n-2$ pomnożonej przez $2\pi r$.

Wyobraźmy sobie, że „pionowy” bok kwadratu na rysunku z poprzedniej strony to kula wymiaru $n-2$. Obracamy ją; osią obrotu jest prosta w przestrzeni wymiaru n. Patrz, Czytelniku, tak długo na rysunek, aż zrozumiesz, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego n. Jeśli nie zrozumiesz, to uwierz. Jeśli zrozumiesz, to nie ciesz się. Wcale nie udowodniłeś, że tak jest.

Ja też poprzestanę na tym, że proszę Cię, Czytelniku, mój uczniu (bo jesteśmy przecież w szkole), żebyś uwierzył w takie właśnie twierdzenie. Jeśli to zrobisz, to masz już algorytm na obliczanie objętości i pól powierzchni kul dowolnego wymiaru. Ile wynosi objętość kuli wymiaru 4? Bardzo proste. Mnożę objętość (pole) kuli wymiaru 2 (koła) przez $2\pi r$, a następnie mnożę przez $\frac{r}{4}$. Wynikiem jest $\frac{1}{2}\pi^2 r^4$. Co z wymiarem 5? Mnożę objętość kuli trójwymiarowej przez $2\pi r$, a następnie przez $\frac{r}{5}$. Otrzymuję $\frac{8}{15}\pi^2 r^5$, trochę dziwny wynik, ale tak jest. A dalej jest… podobnie. Wzór rekurencyjny na objętość kuli n-wymiarowej jest zadziwiająco prosty. Interesujące, że mamy tu indukcję ze skokiem 2 (wymiary nieparzyste i wymiary parzyste znajdują się na innej ścieżce):

$$V_n = \frac{2\pi r^2}{n} \cdot V_{n-2}$$

Gdybyśmy żyli w przestrzeni wymiaru 9, czy moglibyśmy wymagać od naszych, też dziewięciowymiarowych, dzieci, by pamiętały, że objętość kuli o promieniu r to $\frac{32}{945}\pi^4 r^9$? No, a w wymiarze 25 byłoby zupełnie źle.

Wymiar	Objętość kuli n-wymiarowej o promieniu r	Pole powierzchni kuli n-wymiarowej o promieniu r	Stosunek objętości do pola powierzchni
3	$\frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4{,}18r^3$	$4\pi r^2 \approx 12{,}57r^2$	$\frac{1}{3}r$
4	$\frac{1}{2}\pi^2 r^4 \approx 4{,}93r^4$	$2\pi^2 r^3 \approx 19{,}74r^3$	$\frac{1}{4}r$
5	$\frac{8}{15}\pi^2 r^5 \approx 5{,}26r^5$	$\frac{8}{3}\pi^2 r^4 \approx 26{,}32r^4$	$\frac{1}{5}r$
6	$\frac{1}{6}\pi^3 r^6 \approx 5{,}18r^6$	$\pi^3 r^5 \approx 31{,}01r^5$	$\frac{1}{6}r$
7	$\frac{16}{105}\pi^3 r^7 \approx 4{,}71r^7$	$\frac{16}{15}\pi^3 r^6 \approx 33{,}07r^6$	$\frac{1}{7}r$
8	$\frac{1}{24}\pi^4 r^8 \approx 4{,}65r^8$	$\frac{1}{3}\pi^4 r^7 \approx 32{,}47r^7$	$\frac{1}{8}r$
9	$\frac{32}{945}\pi^4 r^9 \approx 3{,}30r^9$	$\frac{32}{105}\pi^4 r^8 \approx 29{,}69r^8$	$\frac{1}{9}r$
10	$\frac{1}{120}\pi^5 r^{10} \approx 2{,}54r^{10}$	$\frac{1}{12}\pi^5 r^9 \approx 25{,}50r^9$	$\frac{1}{10}r$
25	$\frac{8192}{7905853580625}\pi^{12} r^{25} \approx$ $\approx 0{,}00096r^{25}$	$\frac{8192}{316234143225}\pi^{12} r^{24} \approx$ $\approx 0{,}02394r^{24}$	$\frac{1}{25}r$

Czytelnik może się zżymać, że w kluczowym miejscu „dowodu" prosiłem o uwierzenie, że jest tak, jak napisałem. Dla takiego Czytelnika mam zadanie. Wzory, które są podane w tabelce, zostały sprawdzone przez obliczenie stosownych całek. Spójrz, jeszcze raz, Czytelniku, na tabelkę. Zauważ, że liczby z kolumny „objętość", pomnożone przez $2\pi r$, są równe liczbom z kolumny „pole powierzchni" dwa stopnie niżej. Teraz sam znajdź zdroworozsądkowy argument, że tak musi być — jeśli nie wierzysz w mój. Obracaj bryły, aż przekonasz sam siebie. Jeśli nie, to trudno — przypomnij sobie całki wielokrotne!

Spójrzmy jeszcze raz na te liczby, wyrażające objętość kul. Nietrudno udowodnić, że jest tak, jak widzimy. Mianowicie, że kula o promieniu 1 ma największą objętość, gdy $n = 5$, a potem dość szybko maleje do zera. Dlaczego przestrzeń pięciowymiarowa jest tak wyróżniona? Trudno powiedzieć. To nie jest zresztą pytanie matematyczne.

Ale pofantazjujmy. Co by było, gdyby w przestrzeni wymiaru 25 pakowano jabłka do pojemników w kształcie kostki? Załóżmy, że kostka ma krawędź 1. Kula wpisana ma promień $\frac{1}{2}$, zatem objętość to w przybliżeniu 0,00096 dzielone przez 2 do potęgi dwudziestej piątej. A jeszcze skórka… Do jedzenia zostaje… tyle, co nic.

Wbrew temu, co nam się może wydawać, życie w przestrzeni wysokiego wymiaru byłoby uciążliwe. Marzlibyśmy: ciepło ucieka przez skórę, przez powierzchnię naszego ciała. Stosunek pola powierzchni do objętości rośnie bowiem wraz z wymiarem. W przestrzeni wysokiego wymiaru prawie wszystko jest blisko powierzchni. Wprawdzie jajko gotuje się błyskawicznie, ale wszystko stygnie szybko. Gorący barszcz z dymiącym bigosem… w pięćdziesiątym wymiarze to nieosiągalne marzenie. Dalej, każdy węzeł da się rozplątać (a więc buty tylko na rzepy!). Może latanie jest bardziej romantyczne: można nurkować w wymiarze $n - 1$, chować się w $n - 2$, wpaść na chwilę w $n - 3$, spotkać przyjaciela, którego tyle lat temu napotkaliśmy na ścieżce wymiaru $n - 4$, ukryć się z dziewczyną/chłopakiem w niedostępnym zakątku wymiaru $n - 5$… Może. Podziękujmy jednak, że dokoła rozciąga się nasza poczciwa, dobrze znana, nasza piękna przestrzeń małego wymiaru $n = 3$, pełna uroku w każdej z $n + 1$ pór roku, mierzonego obrotem naszej kuli[48], na której żyjemy od zawsze, w pewnej płaszczyźnie, wokół pewnego punktu, z gładkimi powierzchniami P wymiaru $n - 1$, widocznymi czasami nad Bałtykiem, i punktami nieróżniczkowalności funkcji „odległość od P" w Tatrach.

Co ma wspólnego z matematyką treść ostatniego akapitu? Może i niewiele. Skorzystałem ze swojego prawa, że przy samym końcu wykładu mogę mówić, co chcę. Ach, jeszcze będzie dodatek. Kto chce, może już wyjść na przerwę…

[48] Aforyzm Hugo Steinhausa: „Kula u nogi? Ziemia!".

Dobro i zło

Wybitny przedstawiciel lwowskiej szkoły matematycznej, Stanisław Mazur (1905–1981) pracował tuż po II wojnie światowej w biurze repatriacyjnym. W przemówieniu na swoim jubileuszu powiedział, że z jego działalności matematycznej może cieszą się i diabły, a z tej przy repatriacji — na pewno ludzie. Niektórzy uważali tę wypowiedź za aluzję do zaangażowania Stanisława Ulama w projekcie *Manhattan* — konstrukcji bomby atomowej.

A oto fragment listu Nicholasa Galois, ojca Ewarysta, do syna (1829):

> *Ciężko mi się z Tobą pożegnać, ukochany synu (...). Kiedyś zostaniesz wielkim człowiekiem i staniesz się sławny. (...) Będziesz matematykiem. Ale nawet matematyka, ta najszlachetniejsza i najbardziej abstrakcyjna z nauk, jakkolwiek byłaby eteryczna, zapuściła głęboko korzenie w ziemi, w której żyjemy. Nawet matematyka nie pozwoli Ci uciec od własnego i cudzego cierpienia.*

Mówimy dużo o pięknie matematyki. W cytowanej już książce *Rozmowy na koniec wieku* Michał Heller wyraził współczucie dla ludzi niezaznajomionych z wyższą, zaawansowaną matematyką, pisząc, że są wobec tego pozbawieni prawdziwych przeżyć estetycznych. Tymczasem Kartezjusz, którego cenimy... choćby za współrzędne kartezjańskie, pisze[84]:

> *Upodobałem sobie zwłaszcza nauki matematyczne, dla pewności i oczywistości ich racji; ale nie dostrzegałem jeszcze właściwego ich użytkowania; a sądząc, iż służą jedynie umiejętnościom mechanicznym, dziwiłem się, że skoro ich podstawy są tak mocne i stałe, nie zbudowano na nich czegoś bardziej podniosłego. Przeciwnie zaś, pisma starożytnych pogan, traktujące o obyczajach, porównywałem do pałaców bardzo okazałych i wspaniałych, ale zbudowanych jedynie na piasku i błocie.*

W eseju *Człowiek matematyczny* (1913) Robert Musil pisał o samotnym matematyku, pracującym w pokoju, którego okna nie wychodzą na zewnątrz, lecz do sąsiednich pomieszczeń. Wierzy, że jego badania się kiedyś do czegoś przydadzą, ale nie to pobudza go do pracy, tylko „bezgraniczne poświęcenie i pasja", a także „odwaga czystej ratio". Wtedy, sto lat temu, odbierano to pozytywnie. Dziś coraz bardziej mamy uczonym za złe właśnie to, że zamykają się w swojej wieży z kości słoniowej i nie interesuje ich odróżnianie dobra od zła. Niekiedy nawet przewrotnie uzasadniają, że ich badania właśnie przyczyniają się do postępów i w tej dziedzinie. Bez komentarza.

[84] René Descartes, *Rozprawa o metodzie dobrego powodowania swoim rozumem i szukania prawdy w naukach*, tłum. Tadeusz Żeleński–Boy, wyd. Gebethner, Warszawa 1921.

Przesłanie Musila można znaleźć w takim oto fragment tekstu:

> *Próżne zarzuty, że matematycy poza swoją specjalnością to umysły banalne albo durne lub że zawodzi ich wówczas nawet ich logika. To są dla nich obce sprawy, za to w swojej dziedzinie robią to, co my powinniśmy w naszej. Na tym polega niemała mądrość i przykładność ich egzystencji; są analogią do myślącego człowieka przyszłości.*

W przedmowie do zbioru esejów Musila, Zbigniew Światłowski napisał, że „terapia zaproponowana przez Musila to matematyka duszy". Cokolwiek by to miało znaczyć, brzmi ładnie… i groźnie. Tak komentuje to Leszek Kołakowski:

> *Kiedy bohater powieści Musila, który jest może Nietzscheaninem albo pół-Nietzscheaninem, mówi o moralności przyszłych ludzi, która rozłoży się na matematykę i mistykę, nie tylko stawia wyzwanie odziedziczonemu odróżnieniu dobra i zła, ale zdaje się to odróżnienie ryczałtem odrzucać jako rzecz życiu wrogą. Z drugiej strony mówi o „moralności", która właśnie będzie się rozkładać na te dwie części – matematykę i mistykę; rozkładać, a nie rozpadać: to znaczy nie tak ma być, by ludzkość składać się miała z dwóch gatunków – mistyków i matematyków – ale tak raczej, że matematyka i mistyka będą stanowić dwie strony naszego życia duchowego i tak je wypełniać, iż na nic innego miejsca nie zostanie.*
> *W takim razie jednak nie ma podstaw, by w ogóle mówić o moralności. Matematyka jest moralnie obojętna, również diabeł, jak się domyślamy, może być wybornym matematykiem. Moralność we właściwym znaczeniu opiera się na odróżnieniu dobra i zła, a to, co jest poza dobrem i złem, jest moralnie próżne.*

Być może Leszek Kołakowski odnosi się tu do bardzo charakterystycznego fragmentu powieści Musila *Człowiek bez właściwości* (tom 3, część 10). Bohater powieści, Ulrich, w pewnej chwili

> *ze stanowczością kogoś, kto uważa każdą przerwę w rozmowie za zbędną, zaczął dłuższy wykład: – Etyka naszych czasów jest, niezależnie od tego, co by można na ten temat powiedzieć, przede wszystkim etyką wydajności. (...) Nasza epoka i bez tego aż ocieka energią. Nie chce już dostrzegać myśli, chce widzieć same czyny. Ta przerażająca energia wywodzi się stąd, że nie mamy już nic do roboty, oczywiście wewnętrznie. (...) To tak łatwo mieć energię, ale tak trudno znaleźć dla tej energii jakiś sens! Dzisiaj rozumie to bardzo niewiele osób. Dlatego ludzie czynu wyglądają jak gracze w kręgle, którzy przybierają minę Napoleona, aby przewrócić dziewięć drewnianych klocków. (...) Kiedyś u naszej kuzynki zaproponowałem hrabiemu Leinsdorfowi założenie generalnego sekretariatu ścisłości i duszy, aby również ludzie nie chodzący do kościoła wiedzieli, co mają robić. Naturalnie powiedziałem to tylko żartem, gdyż stworzyliśmy już od dawna naukę dla prawdy, ale jeśli chciałoby się zażądać czegoś podobnego dla tego, co poza tym istnieje, musielibyśmy dzisiaj niemal wstydzić się jeszcze jednego szaleństwa.*

Pisze zatem dalej Leszek Kołakowski:

> *Ale i mistyka – i tu, być może, tkwi rdzeń sprawy – jest poza dobrem i złem. Z pewnością mistycy, przynajmniej w kręgu kultury europejskiej, gdy spotykają Boga, spotykają Go jako źródło miłości, więcej, jako miłość samą. (...) Ponieważ jednak Bóg jest jedynym, co na miłość do siebie samego zasługuje, i ponieważ grzechem jest oddawać cześć i miłość stworzeniom dla nich samych, więc powinniśmy innych ludzi kochać tylko za pośrednictwem Boga i dla Boga. (...) Krótko mówiąc: mistyka niesie w sobie niebezpieczeństwo, iż w spotkaniu mistycznym z Bogiem człowieczeństwo jest zagubione, i to zarówno człowieczeństwo mistyka samego, jeśli dąży on do tego, by się w bycie boskim rozpuścić, jak też człowieczeństwo bliźnich naszych, jeśli nie są oni godni tego, by dla nich samych ich miłować, i nie są dla nas samoistnymi celami, tak iż ich oczekiwanie na naszą miłość jest nieprawomocne, a nawet grzeszne.*
> *Aby pozostać ludźmi, musimy przyjąć przypadkowość życia jako normalne nasze przeznaczenie, ale zarówno w matematyce, jak i w Bogu, przypadkowość zostaje zniesiona. Przypadkowość nasza obejmuje nasze ciało, nasze duże czy małe troski i radości, nasze bóle i przyjemności, wszystkie szczęśliwe czy nieszczęśliwe wydarzenia naszego życia. Z wszystkich tych przypadkowości nie pozostałoby nic, wszystkie zostałyby unicestwione w niewysłowionej jedności boskiej i w wiecznych prawdach matematyki. Proroctwo bohatera Musila, gdyby się miało spełnić, oznaczałoby koniec świata.*

Matematyk wlazł na patyk?

> *Tento Pitagoras tak wielki w swey mądrosci był, że z trudnością mu który z mędrczów odeprzeć mogł też opatrznym był że mu zscięskiem rowna było naleść. Miał też ten obyczay że młodzieńca (ktorzi k niemu na posłuchanie chodzili) z wielką chciwoscią obaeżał, á którzy się iemu dowcipnieyszy zdali, thy pod swą moc ku nauce przyimował, á za pięć im lat milcenie wkładał, aby żadny nie mowił, a tich czasow czożby iego z kiem szłyszeli mowiącz aby to sobie w pamięć á rozum brali, á ktory czego nie rozumiał to za sromotę sobie liczili.*

Marcin Bielski, *Żywothy philozofow: to iest: medrczów nauk przyrodzonych y też inszych mężów cznotami ozdobionych ku obyczaynemu nauczaniu człowieka każdego krotko wybrane,*

prassowane w Krakowie przez Floriana, 1535

Matematycy to dziwni ludzie. Rozum każe im twierdzić, że owszem, coś tam da się udowodnić, ale właściwie niewiele. Ale uczucie mówi im, że Hilbert miał rację. Będziemy wiedzieć. Intuicja, ten czwarty składnik kwaternarycznego (to jest poczwórnego) poznania daje nadzieję, że to wszystko się jakoś obejdzie, że sprzeczności rozejdą się po kościach. Na przykład, mało który student matematyki zdaje sobie sprawę, że dowód twierdzenia o istnieniu bazy w każdej przestrzeni liniowej opiera się na pewniku wyboru — tym samym, z którego da się wyprowadzić paradoksalny rozkład kuli na dwie kule, z których każda ma tę samą objętość co wyjściowa. A ci z matematyków, którzy to wiedzą, się nie przejmują. W zakresie działań wpływających na nasze życie przyjęcie bądź odrzucenie pewnika wyboru nie ma znaczenia. Co więcej, nie ma to znaczenia dla przytłaczającej większości badań matematycznych.

Matematycy to dziwni ludzie. Mają opory przed używaniem komputera w swojej pracy badawczej. Po wyłączeniu go zaczynają natychmiast narzekać: „Nie, to nie jest matematyka. Dowody mają być dla ludzi, a nie dla komputerów. A jeżeli w programie jest błąd? A jeżeli procesor się zepsuł? Nie, nie, dowody komputerowe to rzucanie pereł przed wieprze. Owszem, kluczowe twierdzenie w pracy doktorskiej udowodniłem za pomocą programu *Macaulay*, ale mnie samemu to się nie podoba. Mam swoje poglądy, ale się z nimi nie zgadzam".

Matematycy to dziwni ludzie. Gdy myślą o przestrzeniach, liczbach, funkcjach, operatorach, liniach prostych i zakrzywionych powierzchniach, wyobrażają je sobie w bardzo fizyczny sposób. To wszystko istnieje, działa, rusza się. Jest. W najbardziej skrajnej wersji tomizmu. Gdy jednak przyprzeć ich — owych matematyków — do muru, odwracają natychmiast kota ogonem i z poczuciem winy tłumaczą: nie, nie, tak naprawdę to niczego nie ma; to tylko nasze gryzmoły na papierze.

Matematycy to dziwni ludzie. Śmieją się z absurdalnych dowcipów. Podobają im się wiersze, w których abstrakcja przechodzi samą siebie. Oto mój własny przekład wiersza niemieckiego poety Christiana Morgensterna, znanego z takich właśnie pomysłów:

W strumyku
Na każdym kamyku
Siedzi po dziku.
Czy wiesz, matematyku,
Czemu?
I gdzie jest sedno problemu?
Wyjaśniam, jak komu dobremu:
Dzik, jako taki, ma smak
Wyrafi-
Nowany, potrafi
Dla rymu coś zrobić, ot tak!

Otóż jakoś tak jest, że nie-matematycy częściej żądają wyjaśnień, o co właściwie w tym wierszu chodzi i czy naprawdę może się tak zdarzyć, żeby każdy dzik usiadł na oddzielnym kamieniu? Matematycy potrafią zaś to sobie doskonale wyobrazić!

Matematycy to dziwni ludzie. Zdają się mówić wszystkim dookoła: sami się dziwimy, że bierzecie nas na serio. Ale gdy jednak przyprzeć ich do muru, dyskretnie dają odczuć wszystkim, że są najlepsi. Znane powiedzenie Hugona Steinhausa „matematyk zrobi to lepiej” rozciągają niekiedy na różne formy aktywności. Zaś w znanej powieści *Time Enough for Love* Robert A. Heinlein pisze dość dosadnie i prowokująco: “Anyone who cannot cope with mathematics is not fully human. At best he is a tolerable subhuman who has learned to wear shoes, bathe, and not make messes in the house.”

Matematycy to dziwni ludzie. Bo poza tym wszystkim zachowują zdrowy rozsądek i natychmiast odróżniają, co jest wartościowe, a co… mniej. No, w każdym razie odróżniają dobrą matematykę od złej.

Docendo discimus. Ucząc innych sami się uczymy. Chcemy lepiej nauczać. Co z treści tego wykładu możemy wykorzystać w szkole? Nic? A może: wszystko? Tylko nie wprost, a tak, żeby nasi uczniowie nie zorientowali się, aż będzie za późno? Na co za późno? Na to, by uciec od rozumnego przeżywania świata.

Zagadnienia do przemyślenia

16.1. Wytłumacz, o co chodziło Gaussowi, gdy mówił: „swoje wyniki posiadam od dawna, nie wiem tylko, jak do nich dojdę”.

16.2. Gauss jest też autorem powiedzenia, że matematyka jest Królową Nauk. Jak sądzisz, dlaczego Gauss tak powiedział i dlaczego dziś pogląd ten jest kwestionowany, a co najmniej nierozumiany?

16.3. Matematyka ma niekiedy reputację nauki pięknej, ale zimnej. Rozwiń porównanie (pochodzące z powieści Iris Murdoch *Przypadkowy człowiek*) matematyki do *zimnych Himalajów intelektu*.

16.4. Opowiadanie *Chłopiec na lotnym trapezie* Williama Saroyana (Książka i Wiedza, 1968, tłum. Wojciech Adamiecki) zaczyna się tak oto[85]:

> Spoczywa czujny wśród międzygwiezdnych przestrzeni. Czuje uniesienie ni radość, to znów bezsens, koniec wszystkiego, koniec Rzymu, a nawet Babilonu… zaciśnięte zęby, wspomnienia, żar wulkanu, ulice Paryża, równiny Jerycha, oto przemyka wpośród pustki niby płaz, galeria akwarel, morze i ryby o dużych oczach, symfonia, stół gdzieś na szczycie wieży Eiffla, jazz w gmachu opery, budzik i absurdalność przeznaczenia, rozmowa z drzewem, rzeka Nil, cadillakiem do Kansas, ryk Dostojewskiego, ciemne słońce.

[85] Choć nie ma to żadnego związku z treścią książki, warto przytoczyć, odkrytą przez redaktora, ingerencję cenzury w tekst tłumaczenia. Otóż między „Chaplin” a „tłum Żydów” w oryginale było jeszcze „Stalin, Hitler”. To było oczywiście za mocne w PRL w 1968 roku.

A przecież już starożytni uważali, że każdy osąd musi być poczwórny[106]. Uczucie przeciwstawia się intelektowi, a pozazmysłowa intuicja — zmysłowej percepcji.

* * *

Pięć motywów poznania św. Bernarda z Clairvaux[107]:

1. Są ludzie, którzy chcą wiedzieć jedynie po to, aby wiedzieć: to jest prosta ciekawość.
2. Inni chcą wiedzieć po to, aby w ten sposób zyskać rozgłos: to jest żałosna próżność.
3. Są tacy, którzy osiągają wiedzę dla pieniędzy lub zaszczytów: ich motyw jest brzydki.
4. Ale są tacy, którzy chcą wiedzieć, aby zbudować innych: to jest miłość.
5. Inni — aby się zbudować: to jest mądrość.

W 1872 roku Emil Du Bois Reymond wygłosił w Towarzystwie Naukowym w Lipsku referat, będący sztandarowym przykładem nowoczesnego pesymizmu poznawczego: *Ignoramus et ignorabimus. Nie wiemy i nie będziemy wiedzieć*. Do tego tytułu nawiązał David Hilbert w wystąpieniu w 1930 roku, które zakończył słowami: *Wir können wissen. Wir werden wissen. Możemy wiedzieć. Będziemy wiedzieć*. W tych słowach wyraził swój optymizm poznawczy: matematyka nas nie zwodzi, nie oszukuje. Zadania mają różny stopień trudności, ale są rozwiązywalne. Chcemy i możemy mieć pełny wgląd w strukturę świata matematycznego. Z którymi motywami poznania św. Bernarda zgadza się program Hilberta?

* * *

Tytułowy bohater powieści Roberta Musila *Niepokoje wychowanka Törlessa* zadziwia się liczbami urojonymi. Mówi do kolegi: „Pomyśl sobie: w takim rachunku występują z początku całkiem solidne liczby, które mogą przedstawiać metry, ciężary lub coś innego, równie realnego, i przynajmniej są prawdziwymi liczbami. Przy końcu rachunku też są takie liczby. Ale te liczby łączy coś, czego nie ma. Czy to nie jest jak most, w którym jest tylko pierwsze i ostatnie przęsło, a przez który przechodzi się mimo to tak pewnie, jak gdyby stał cały? Dla mnie w takim rachunku jest coś, co powoduje zawrót głowy, jak gdyby kawałek drogi prowadził Bóg wie dokąd” (cytat według przekładu Wandy Kragen).

* * *

[106] Jest to zatem grupa czwórkowa Kleina $Z_2 x Z_2$, nie zaś cykliczna Z_4.

[107] Tak przedstawił je Jan Paweł II w wezwaniu do świata nauki w 2000 roku. Bernard z Clairvaux był cystersem, jednym z największych kontynuatorów myśli św. Augustyna w średniowieczu. Żył w latach ok. 1090–1153, bardzo długo jak na tamte czasy i warunki, w których mieszkał. Aby poskromić swoją pychę, latami mieszkał w niewielkiej kamiennej celi zalewanej przez wodę.

Wspomnienia szkolne pisze co drugi człowiek. Pozwolę sobie i ja. Ale nie będę pisał o szkole, w której byłem uczniem. Całą swoją edukację szkolną odebrałem zresztą w tym samym budynku (najpierw XIII Szkoła Podstawowa TPD w Warszawie, potem XLI Liceum im. Joachima Lelewela).

Szkoła, którą chcę ocalić od zapomnienia, mieściła się w Rokicinach Podhalańskich. Ekspres *Tatry* z Warszawy do Zakopanego nawet nie zwalnia na łuku, gdzie jest przystanek kolejowy o tej nazwie, stworzony w 1926 roku dla klasztoru urszulanek. W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych zeszłego wieku w klasztorze bywało wielu przedstawicieli episkopatu krakowskiego. Częstymi gośćmi byli Józef Tischner i Stanisław Dziwisz, którego dom rodzinny stoi w następnej pobliskiej wsi. Na pewno niejeden raz był w Rokicinach Karol Wojtyła. Ale moje wspomnienia są starsze, sięgają pierwszej połowy lat pięćdziesiątych.

Pochodzę z rodziny nauczycielskiej, rodzice moi byli nauczycielami (kolejnych szczebli, a potem pracownikami administracji szkolnej), a w dalszej rodzinie większość wujków i cioć miała coś wspólnego ze szkołą.

Szkoła, której kierowniczką była przez drugą połowę swojego życia ciocia Hania (przez pierwszą była nauczycielką w innej wsi), mieściła się więc w Rokicinach w małym parterowym budynku, z mieszkalną facjatką. Jeździliśmy tam na wakacje — jeszcze kiedy nie miałem 7 lat, a i potem sporadycznie. Gdy zachorowałem na szkarlatynę, rodzice wysłali tam starszego brata, żeby się nie zaraził. Odmówił powrotu i skończył tam bodajże piątą klasę.

Od furtki szło się kilka metrów ścieżką wśród malw, rosnących wszędzie, i przez stary, drewniany ganek wchodziło się do ciemnego korytarza, z niego zaś na prawo do jedynej sali lekcyjnej. Był to duży, jasny pokój, z podłogą z desek i dwoma piecami. Uczyły się tam jednocześnie dwie klasy. Było to wtedy dość często spotykane rozwiązanie. Nauczyciel musiał mieć podzielną uwagę i stosować wymyślne sztuczki socjotechniczne, wymuszające karność obu klas. Polegało to głównie na zadawaniu odpowiednich zadań („pomyślcie 5 minut”).

W klasie za kotarą znajdowała się duża scena (!), używana w czasie uroczystości szkolnych, akademii z okazji świąt państwowych i występów amatorskich. Dodawało to klasie tajemniczości. Lekcji nie kończył dzwonek, bo po co było dzwonić, kiedy wszyscy byli razem? W szkole (jak i w całej wsi) nie było prądu elektrycznego. Tylko sporadycznie i od święta dróżnik kolejowy włączał na kilka godzin generator. Z powodu braku prądu nie było radia, telewizja nie istniała, a zegar szkolny regulowało się według kolejowego. W zimie problemem były pierwsze lekcje: sala była zimna, bo dla oszczędności nie utrzymywano ciepła wieczorami. Latem miało się wrażenie, że lekcje są w ogrodzie: malwy wciskały się każdym oknem. Szkoła była dobrze wyposażona: była w niej tablica, mapy i wiele plansz informacyjno-indoktrynacyjnych. Zapamiętałem planszę z przepisami ruchu drogowego (najbliższy samochód można było oglądać w Chabówce).

Po lewej stronie korytarza było wejście do części mieszkalnej. Ciocia mieszkała dobrze: miała dla siebie jeden duży pokój, jeden mały i kuchnię. Jeszcze dbano o nauczycieli. Łazienki nie było; studnia dawała dobrą wodę. Było jeszcze jedno wyjście: do ogródka, gdzie rosło kilkanaście krzaków agrestu i porzeczek, chyba z pięć jabłonek i stał kurnik. Kur było dużo, zatem tubylcy nie przynosili cioci w darze jajek, a tylko śmietanę, ser, masło, wełnę, czasami trochę mięsa ze świeżo ubitego cielaczka. Najgorliwsi przychodzili na imieniny, oczywiście nie na główne (te były dla rodziny, księdza proboszcza i siostry przełożonej). Ciocia była numerem 2 we wsi, numerem 1 był ksiądz proboszcz, a numerem 3 — węglarz, w którego domu szkoła wynajmowała jeszcze jedną izbę lekcyjną dla starszych klas (5, 6, 7). W sklepie przy domu węglarza były dobre stalówki, zeszyty, atrament, obsadki — a także podręczniki. Nie było niedostatku, każdy miał, co chciał. Atramentu ani węgla w szkole nie brakowało. Słowa *komputer* nikt by wtedy nie zrozumiał, ale wysyłanie *maili* nie było trudne. Prawie codziennie przyjeżdżał rowerem z sąsiedniej Raby Wyżnej listonosz (młodszym czytelnikom wyjaśniam, że to taki staromodny *webmaster*), a własne listy można też było bezpośrednio zanieść do wieczornego pociągu Zakopane–Warszawa, który jako jedyny dalekobieżny zatrzymywał się w Rokicinach. W Rabce można było kupić wieczne pióro, ale dzieci nie mogły nim pisać, bo psuło charakter pisma. Długopisy nazywały się piórami kulkowymi i były podejrzaną nowinką.

W szkole trzeba było uczyć wszystkiego, a więc i fizyki, i rosyjskiego. Nauczyciel rosyjskiego znał prawie wszystkie litery tego alfabetu, a co łatwiejsze słowa był w stanie nawet przeczytać. Za to fizyk — wedle ciocinych opowieści — był wspaniałym nauczycielem. Nie pamiętam go i ocenić już nie mogę. Odbywała się także gimnastyka. Nakłonić do niej wiejskie dzieci było beznadziejną sprawą, zwłaszcza że nauczycielka wzorem tężyzny fizycznej nie była.

Ogródek był pewnie malutki, ale zapamiętałem go jako olbrzymi, ogrodzony wysokim płotem. Można było zaszyć się w krzaku agrestu i rozmyślać o matematyce… Tu oczywiście ponosi mnie fantazja i zmyślam… chociaż w legendach rodzinnych przechowywana jest opowieść, jakobym sam z siebie wyprowadził, ile jest 4 razy 7, i spostrzegł błyskotliwie, że to tyle samo, co 7 razy 4 (banalne, Czytelniku: weź garść kamyczków i układaj cztery razy po siedem albo siedem razy po cztery — tylko nie myl tych dwóch działań! — a jak ułożysz, to pomyśl; następnie samodzielnie znajdź dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata!).

Dlaczego o tym wszystkim piszę? Trochę dla siebie samego, to jasne. Ale też po to, by pokazać, jak wiele się zmieniło. Dziś moja szkoła nosi imię Bronisława Czecha i przoduje w regionie. Jako jedna z dwóch szkół województwa małopolskiego i jedna z 32 w kraju realizuje europejski program „Szkoła Marzeń". W pięknym budynku są świetnie wyposażone pracownie… ale pewnie mieszkańcy Rokicin nie przynoszą już nauczycielom sera, masła ani wełny.

Oczywiście, ja sobie tylko tak mówię. Każdy z Czytelników i tak ma własny pogląd na to, czy warto pamiętać, jak to drzewiej bywało… Cóż, szkoła przestała być głównym źródłem wiedzy i ogniskiem kultury. Nauczyciel nie jest już mądrzejszy od większości rodziców swoich uczniów. Zdobywać szacunek społeczeństwa musimy nieco innymi metodami. Jakimi? Wykręcę się od odpowiedzi pod pretekstem, że książka jest przecież o nauczaniu matematyki…

Jeśli przebrnąłeś, Czytelniku, przez rozdział o geometrii w *n*-wymiarach, to może uda ci się wyobrazić, jak w takich warunkach — jak w Rokicinach Podhalańskich — można było uczyć. A bardziej konkretnie: napisz scenariusz lekcji prowadzonej równocześnie dla dwóch klas. Zwykłej lekcji, a nie pogadanki.

* * *

A oto dwa obrazy matematyki. Dopiero w dość późnym wieku zrozumiałem, że matematyka może być dla kogoś nudna — przecież dość dobrze zapamiętałem owo fascynujące układanie 28 kamyczków na szkolnym podwórku u cioci! Że trudna, to wiedziałem (układałem długo i liczyłem kilka razy), ale żeby nudna? Teraz wiem, dlaczego — ale proszę traktować moją teorię z przymrużeniem oka. Oparta jest ona na porównaniu opisanym szerzej przez Clive'a Staplesa Lewisa (1898–1963). Otóż możemy traktować studiowanie matematyki jak poznawanie nieznanego terenu na podstawie mapy, szczegółowej i wiernej, z gęsto narysowanymi poziomicami. Mogę planować tury wycieczkowe, „robić" wycieczki górskie („to będzie piękna wspinaczka"), „czuć" chłód lasów i ciepło hal, zastanawiać się nad panoramą, a nawet bawić się geometrią. Wprawdzie to tylko mapa, ale ów kraj gdzieś jest. A w każdym razie mógłby być.

Możemy być brutalnie szczerzy. Nie ma żadnego kraju. Jest tylko kawałek papieru z nagryzmolonymi liniami. Nazwiemy je poziomicami, niebieskie linie nazwiemy rzekami, a zielone obszary lasami (albo halami, w zależności od barwy zieleni). Wprowadzimy pojęcia drogi, widoku, szlaku wyłącznie po to, by dopomóc naszej ułomnej wyobraźni i starać się wlać trochę ducha w bezduszny kawał papieru. Ale nie myślmy, że to jest jakiekolwiek nawiązanie do istniejącego świata. Świata zewnętrznego nie ma. Jest tylko mapa. Poznajemy tylko nią samą.

Zaryzykuję twierdzenie, że matematyka jawi nam się jako nauka fascynująca lub nudna w zależności od tego, jaki jej obraz przekazali nam dyskretnie nasi nauczyciele. Pamiętajmy o tym w naszej pracy z dziećmi i młodzieżą.

* * *

Oto uniwersalny, wyjątkowy i niezawodny **Poradnik dla wychowawcy klasy maturalnej**. Być może uczniowie proszą cię o radę, co robić po ukończeniu szkoły. Kim być, jaką karierę wybrać? Możesz zresztą wyjść do nich sam(a) z propozycją, że bardzo prosto odkryjesz ich prawdziwe predyspozycje, ukryte

Przekazujmy naszym uczniom dyskretne sygnały, że matematyka jest najlepsza, najciekawsza, najważniejsza, najbardziej wciągająca. A dopiero na końcu dodawajmy, że także najbardziej wymagająca.

Wykłady Michała Szurka są przeznaczone zarówno dla doświadczonych nauczycieli, jak i dla studentów, którzy dopiero przygotowują się do pracy w szkole. Pierwszym zaproponują nowe podejście do przedstawiania niektórych tematów i zagadnień. Drugim pomogą przezwyciężyć strach przed lekcjami, poznać zasady ich prowadzenia i uporządkować swą wiedzę. Wszystkim dadzą możliwość odkrycia własnego twórczego sposobu na nauczanie, a dzięki temu przekonania uczniów, że matematyka jest i pożyteczna, i interesująca.

W skład serii wchodzi osiem tomów, a każdy z nich gwarantuje lekturę zajmującą, pełną ciekawostek i interesujących komentarzy.

GDAŃSKIE WYDAWNICTWO OŚWIATOWE

www.gwo.pl