ZGODNE Z USZCZUPLONĄ PODSTAWĄ PROGRAMOWĄ

VADEMECUM


# Nowa teraz matura

- komplet treści maturalnych
- przykłady rozwiązanych zadań z licznymi komentarzami
- zadania maturalne do samodzielnego rozwiązania
- planer maturalny

## FIZYKA

nowa era

# Spis treści

MATERIAŁY NA OSTATNIĄ PROSTĄ



## Typy zadań maturalnych



## Odpowiedzi, dodatki i tabele



**Pobierz**
**Kod: 872TJL**
app.nowaterazmatura.pl
**Karta wzorów CKE**

**SPRAWDŹ AKTUALNOŚCI CKE**
**Kod: VHR1HC**
app.nowaterazmatura.pl

# Co znajdziesz w Vademecum?

Vademecum „NOWA Teraz matura” to kompendium wiedzy z fizyki, które doskonale sprawdzi się w przygotowaniu do egzaminu maturalnego, a także przewodnik do ćwiczenia umiejętności niezbędnych na maturze. Jest w pełni skorelowane ze „Zbiorem zadań maturalnych” i zawiera kody dostępu do materiałów w aplikacji app.nowaterazmatura.pl

**Przykład 2.**

Przykłady rozwiązane krok po kroku wraz z komentarzami pomogą ci w wyćwiczeniu umiejętności rozwiązywania zadań różnego typu.

$x \pm \Delta x$

Dzięki czytelnym wyróżnieniom łatwo odnajdziesz ważne wzory. Przy wzorach występujących w karcie wzorów CKE zaznaczono odnośniki, aby podczas przygotowań do matury nie zapomnieć o zapoznaniu się z tą pomocą maturalną.

Niepewność standardowa wartości średniej jest tym

Ważne informacje i wskazówki umieszczone w kolorowych ramkach ułatwią ci utrwalenie wiedzy i wykorzystanie jej w zadaniach.

**CZY JUŻ POTRAFIĘ**

Lista wymagań egzaminacyjnych z danego działu pozwala sprawdzić stopień opanowania materiału.

**WARTO ZAPAMIĘTAĆ**

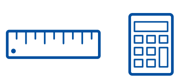
Podsumowania przykładów rozwiązanych zadań ułatwiają zapamiętywanie praktycznych aspektów, które przydają się podczas samodzielnego rozwiązywania zadań.

*Gdzie siła wykonuje pracę równą zeru? Podaj inny przykład niż wymieniony obok.*

Pytania na marginesach pomogą ci sprawdzić zrozumienie materiału. Odpowiedzi do nich znajdziesz pod kodami QR. Jeśli chcesz je wydrukować, kod QR ze zbiorczymi odpowiedziami znajduje się na końcu odpowiedzi do zadań i pytań (s. 408).

**Często na maturze**

Zagadnienia często pojawiające się na maturze zostały oznaczone w odpowiednich miejscach na marginesie.



W taki sposób oznaczono zadania, do których rozwiązania trzeba użyć linijki lub kalkulatora naukowego.

Z **Sprawdź w Zbiorze zadań** *Jest na to sposób* s. 48

CKE **Znajdziesz to w Karcie wzorów** s. 16 z 20

Odsyłacze do zbioru zadań maturalnych i karty wzorów CKE pozwalają na szybkie znalezienie materiałów do ćwiczenia umiejętności.

**Przykład 1.,**
patrz s. 25

Odsyłacze przy zadaniach analogicznych do przykładów pozwalają sprawnie poruszać się po Vademecum. Jeśli masz problem z rozwiązaniem zadania, przeanalizuj jeszcze raz przykład i zamieszczone tam komentarze.

**Sprawność,**
patrz s. 49

**Dodatek matematyczny,**
patrz s. 410

**Rzut poziomy,**
patrz s. 45

Pozostałe odsyłacze do treści w Vademecum pokazują relacje i wzajemne zależności między zagadnieniami, a kolory odpowiadające kolorystyce poszczególnych działów ułatwiają ich znalezienie.

**Obejrzyj doświadczenie obowiązkowe**

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: 69LRBK**
Film: **Zderzenia**

Kody QR na marginesach zapewniają dostęp do dodatkowych materiałów cyfrowych wspierających przygotowania do egzaminu, m.in. filmów z doświadczeniami, rozwiązaniami zadań i omówieniem trudniejszych zagadnień, a także rozwiązań wszystkich zadań z Vademecum, odpowiedzi do pytań z marginesów, dodatkowych zadań CKE, testów i fiszek.

**CKE MARZEC 2021**

Czytelne oznaczenie zadań CKE pozwala łatwo je odnaleźć i odróżnić od zadań autorskich. Zadania oznaczone CKE MARZEC 2022 pochodzą z arkusza pokazowego CKE na maturę 2023/2024, a CKE MARZEC 2021 – z informatora maturalnego CKE. Pozostałe, opisane miesiącem MAJ, to zadania z matur z poprzednich lat.

**Uzupełnij mapę myśli:**

Mapy myśli do uzupełnienia pomogą ci uporządkować wiedzę z danego działu.

**Sprawdź**

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: Z6UJKA**
**Rozwiązania zadań 1. i 2.**

Krótkie odpowiedzi do zadań znajdziesz na końcu publikacji, a pełne rozwiązania pod kodami QR.

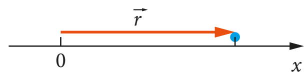
*Dzięki marginesom możesz dodawać własne notatki do omawianych treści.*

W taki sposób oznaczono treści spoza wymagań egzaminacyjnych.

# 1. Kinematyka

## Wielkości opisujące ruch

- **Punkt materialny** to model ciała o określonej masie, którego rozmiary pomijamy.
- **Układ odniesienia** – punkt lub obiekt, względem którego jest rozpatrywany ruch ciała.
- **Wektor położenia** $\vec{r}$ – wektor opisujący położenie punktu materialnego w wybranym układzie współrzędnych.

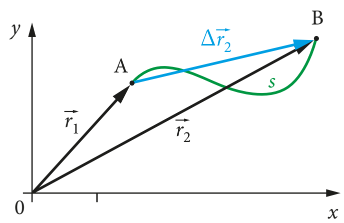



Początek wektora położenia znajduje się w początku układu współrzędnych, a koniec – w miejscu położenia punktu materialnego.

- **Wektor przemieszczenia** $\Delta\vec{r}$ – wektor łączący początkowe i końcowe położenie ciała w układzie współrzędnych (koniec wektora znajduje się w końcowym położeniu ciała).

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad [\Delta r] = \text{m}$$

gdzie: $\vec{r}_1$ – wektor położenia początkowego, $\vec{r}_2$ – wektor położenia końcowego.




A – położenie początkowe

B – położenie końcowe

Jeśli ciało wróci w to samo miejsce, to jego przemieszczenie jest równe zeru a droga jest długością toru ruchu, więc jest różna od zera.

- **Droga** $s$ to długość linii, jaką zakreśla punkt materialny będący w ruchu, $[s] = \text{m}$.
  - Przebyta droga $s$ jest równa wartości przemieszczenia $\Delta r$ ciała jedynie wtedy, gdy porusza się ono wzdłuż linii prostej stale w tę samą stronę.
- **Tor ruchu** to linia, po której porusza się ciało. Droga to długość tego toru.
- **Prędkość średnia** $\vec{v}_{śr}$ **i chwilowa** $\vec{v}_{ch}$

$$\vec{v}_{śr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

gdzie: $\Delta\vec{r}$ – całkowite przemieszczenie ciała, $\Delta t$ – czas, w jakim nastąpiło przemieszczenie.

Jeżeli $\Delta t \to 0$, to prędkość nazywamy **prędkością chwilową** $\vec{v}_{ch}$.

Prędkość chwilowa to prędkość określana dla bardzo krótkiego przedziału czasu.

- **Średnia wartość prędkości**

$$v_{śrw} = \frac{s_c}{t_c}$$

gdzie: $s_c$ – całkowita przebyta droga, $t_c$ – całkowity czas trwania ruchu.

Nie należy mylić pojęć: wartość prędkości średniej i średnia wartość prędkości.

**Obejrzyj film**

**Kod: 8DC2JY**

app.nowaterazmatura.pl

Tutorial: **Wektory**

*Piłka do koszykówki spada pionowo i uderza w ziemię z prędkością 5 $\frac{m}{s}$. Następnie odbija się pionowo w górę z prędkością 3 $\frac{m}{s}$. Ile wynosi zmiana prędkości tej piłki? Narysuj wektory prędkości w opisanej sytuacji.*

**Kod: CVY1SP**

app.nowaterazmatura.pl

**Sprawdź odpowiedź**

CKE **Znajdziesz to w Karcie wzorów** s. 16 z 20

- **Przyspieszenie średnie**

$$\vec{a}_{\acute{s}r} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad [a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

gdzie: $\Delta\vec{v}$ – zmiana prędkości (różnica między prędkością końcową a prędkością początkową), $\Delta t$ – czas, w jakim nastąpiła ta zmiana.

  - Jeżeli $\Delta t \to 0$, to przyspieszenie nazywamy **przyspieszeniem chwilowym** $\vec{a}_{ch}$.

Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

## Klasyfikacja ruchów

RUCH

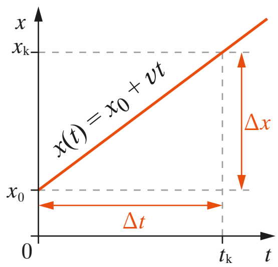
- PROSTOLINIOWY
  - jednostajny: $v = \mathrm{const}$
  - niejednostajny: $v \neq \mathrm{const}$
- KRZYWOLINIOWY
  - jednostajny: $v = \mathrm{const}$
  - niejednostajny: $v \neq \mathrm{const}$

## Ruch jednostajny prostoliniowy

Często na maturze

- **Ruch jednostajny prostoliniowy** – ruch odbywający się wzdłuż prostej, w którym prędkość jest stała (jej wartość i kierunek).

$$\vec{v} = \mathrm{const} \quad \vec{a} = 0, \quad \text{bo} \quad \Delta\vec{v} = 0$$




- **Równanie ruchu jednostajnego prostoliniowego**

$$x(t) = x_0 + vt$$

gdzie: $t$ – czas trwania ruchu, $x_0$ – współrzędna położenia początkowego, $x$ – współrzędna położenia ciała w chwili $t$, $v$ – prędkość ciała.

Obejrzyj doświadczenie obowiązkowe

Kod: XNB74E

app.nowaterazmatura.pl

Film: **Badanie ruchu I**

W zależności położenia od czasu w ruchu jednostajnym prostoliniowym, opisanej wzorem $x = x_0 + vt$, prędkość $v$ jest współczynnikiem kierunkowym $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ prostej będącej wykresem tej zależności (patrz rys.).

- **Droga** w ruchu jednostajnym prostoliniowym

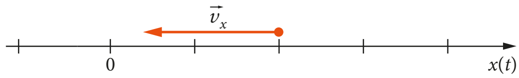
$$s(t) = vt$$

gdzie: $v$ – wartość prędkości ciała, $t$ – czas trwania ruchu.

Na podstawie wykresu zależności położenia od czasu dla ruchu jednostajnego prostoliniowego możemy określić wartość i zwrot prędkości. Odczytujemy z wykresu dowolną zmianę położenia $\Delta x$ i odpowiadający jej przedział czasu $\Delta t$ i wyznaczamy wartość prędkości.
Jeśli $\Delta x < 0$, to zwrot wektora prędkości jest przeciwny do zwrotu osi $x$.

**Równanie współrzędnej, interpretacja wykresów**

**a)**



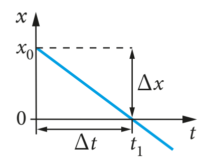

Jeżeli ruch ciała w przyjętym układzie współrzędnych odbywa się wzdłuż osi $x$, równanie ruchu jednostajnego prostoliniowego przyjmuje postać **równania współrzędnej**:

$$x = x_0 + v_x t$$

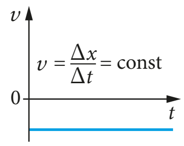
Jeżeli zwrot wektora prędkości $\vec{v}_x$ jest zgodny ze zwrotem osi $x$, to jego współrzędna $v_x$ jest dodatnia, a jeżeli zwrot jest przeciwny, to jego współrzędna jest ujemna.

Gdy ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym w stronę przeciwną do zwrotu osi $x$ (rys. a), wykresy zależności $x(t)$ i $v(t)$ przedstawiają się jak na rys. b) i c). W chwili $t_1$, gdy wykres $x(t)$ przecina oś $t$, współrzędna położenia wynosi $x = 0$, czyli ciało przechodzi przez początek przyjętego układu współrzędnych.

**b)**




**c)**




## Klasyfikacja ruchów jednostajnie zmiennych

**RUCH PROSTOLINIOWY JEDNOSTAJNIE ZMIENNY**

ruch wzdłuż prostej, przyspieszenie nie zmienia się w czasie:
$\vec{a} = \text{const}$, $\vec{v} \neq \text{const}$

| Ruch jednostajnie przyspieszony | Ruch jednostajnie opóźniony |
|---|---|
| $\lvert\vec{v}\rvert$ wzrasta o jednakowe wartości w równych odstępach czasu, $\Delta v = \text{const}$, czyli $a = \text{const}$ | $\lvert\vec{v}\rvert$ maleje o jednakowe wartości w równych odstępach czasu, $\Delta v = \text{const}$, czyli $a = \text{const}$ |

Obejrzyj doświadczenie obowiązkowe

Kod: 43G8MK

app.nowaterazmatura.pl

Film: **Badanie ruchu II**

- **Równanie ruchu prostoliniowego jednostajnie zmiennego**

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

gdzie: $x_0$ – współrzędna położenia początkowego, $v_0$ – prędkość początkowa ciała, $t$ – czas trwania ruchu, $a$ – przyspieszenie.

W bardziej złożonych zadaniach dotyczących ruchu jednostajnie zmiennego nieraz trzeba będzie rozwiązać równanie kwadratowe. Sposób jego rozwiązania jest przedstawiony w kartach wzorów CKE na s. 13.

- **Prędkość** w ruchu jednostajnie zmiennym

$$v(t) = v_0 + at$$

gdzie: $v_0$ – prędkość początkowa, $a$ – przyspieszenie, $t$ – czas trwania ruchu.

Gdy interpretujesz pole pod wykresem zależności prędkości od czasu, zwróć szczególną uwagę na jednostki prędkości i czasu. Jeśli prędkość jest podana w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$, a czas w minutach, to do obliczeń czas należy przeliczyć na sekundy.

CKE

**Znajdziesz to w Karcie wzorów**

s. 16 z 20

- **Związek współczynnika kierunkowego z przyspieszeniem**

Na podstawie wykresu zależności $v(t)$ można określić wartość przyspieszenia – jest ona liczbowo równa współczynnikowi kierunkowemu prostej (rys. a).

- **Wykres $v(t)$ a zmiana położenia ciała**

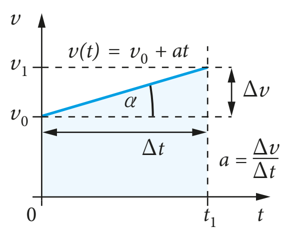
Pole pod wykresem zależności prędkości od czasu $v(t)$ dla ruchu jednostajnie zmiennego jest liczbowo równe zmianie położenia ciała (rys. b):

$$\Delta x = P_1 + P_2 - P_3 = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3$$

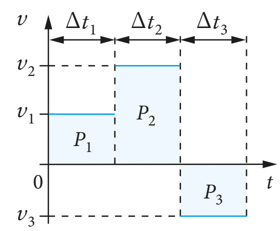
Pole $P_3$ zostało wstawione ze znakiem minus, ponieważ jest pod osią $t$ (w przedziale $\Delta t_3$ ciało poruszało się w przeciwną stronę).

Jeżeli ciało nie zawraca, to $s = |\Delta x|$. Jeśli zawraca, to należy osobno obliczyć odcinki przebyte w różne strony.

**a)**




**b)**




Zadanie dotyczące skomplikowanego przebiegu ruchu często jest łatwiej przeanalizować, gdy narysujesz wykres zależności prędkości od czasu i uwzględnisz, że pole pod tym wykresem oznacza przebytą drogę.

- **Droga** w ruchu jednostajnie zmiennym

$$s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Zauważ, że jeśli $v_0 = 0$, to $s = \left|\frac{at^2}{2}\right|$.

- Zależność drogi od przyspieszenia $a$ oraz prędkości końcowej $v_k$ i początkowej $v_0$ w ruchu jednostajnie przyspieszonym można przedstawić również w postaci:

$$s = \frac{v_0 + v_k}{2} \cdot t \quad \text{lub} \quad s = \frac{v_k^2 - v_0^2}{2a}$$

Wzór na drogę w ruchu jednostajnie opóźnionym może być stosowany do opisu położenia ciała tylko do momentu jego zatrzymania. Jeżeli podczas ruchu ciało się zatrzymuje, a następnie zmienia kierunek ruchu lub zwrot (np. podczas rzutu pionowego do góry, a następnie spadku), to wzór na drogę należy zastosować dwukrotnie dla każdego z etapów ruchu.

- **Zwrot przyspieszenia**

Jeśli wektory przyspieszenia i prędkości mają zgodne zwroty, to zwiększa się wartość prędkości ciała (ciało przyspiesza). Jeśli mają zwroty przeciwne – wartość prędkości ciała maleje (ciało zwalnia). Przeanalizuj informacje z tabeli na s. 40.

CKE **Znajdziesz to w Karcie wzorów** s. 19 z 20

**Obejrzyj film**
**Kod: 9WL54M**
app.nowaterazmatura.pl
Tutorial: **Wykresy w fizyce**

CKE **Znajdziesz to w Karcie wzorów** s. 16 z 20

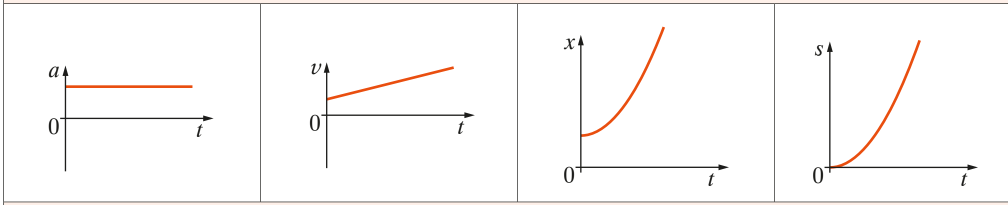
Z **Sprawdź w Zbiorze zadań** *Jest na to sposób* s. 50

*Skąd się biorą te wzory? Spróbuj samodzielnie je wyprowadzić.*

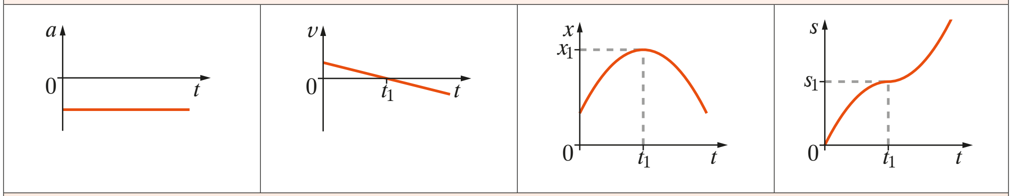
**Kod: AEPJKQ**
app.nowaterazmatura.pl
**Sprawdź odpowiedź**

Często na maturze

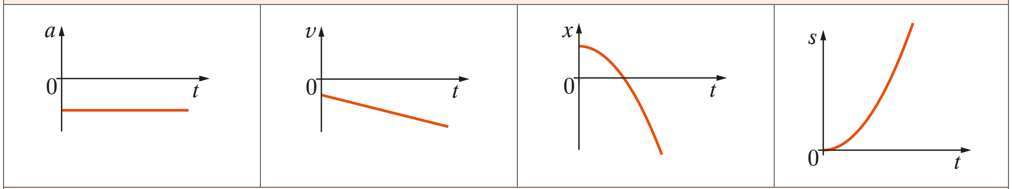
**I.** Zwroty wektorów $\vec{v}$ i $\vec{a}$ zgodne ze zwrotem osi $x$ – ciało porusza się w stronę dodatnich wartości $x$, wartość prędkości wzrasta (ciało przyspiesza)



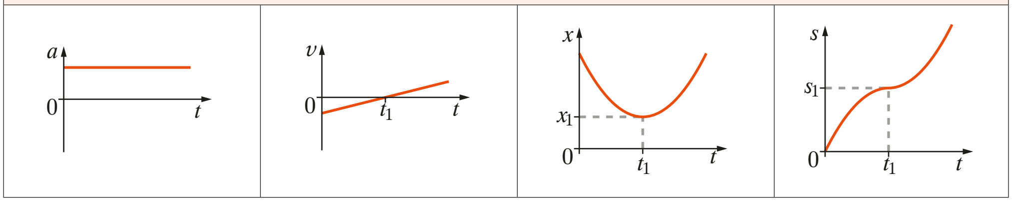

**II.** Zwrot wektora $\vec{v}$ zgodny ze zwrotem osi $x$, zwrot wektora $\vec{a}$ przeciwny do zwrotu osi $x$ – ciało porusza się w stronę dodatnich wartości $x$, wartość jego prędkości maleje (ciało zwalnia). W chwili $t_1$ ciało się zatrzymuje, a następnie porusza się coraz szybciej przeciwnie do zwrotu osi $x$




**III.** Zwroty wektorów $\vec{v}$ i $\vec{a}$ przeciwne do zwrotu osi $x$ – ciało porusza się w stronę ujemnych wartości $x$, wartość prędkości wzrasta (ciało przyspiesza)




**IV.** Zwrot wektora $\vec{v}$ przeciwny do zwrotu wektora $\vec{a}$ i zwrotu osi $x$ – ciało porusza się w stronę ujemnych wartości $x$, wartość jego prędkości maleje (ciało zwalnia). W chwili $t_1$ ciało się zatrzymuje, a następnie porusza się coraz szybciej zgodnie ze zwrotem osi $x$

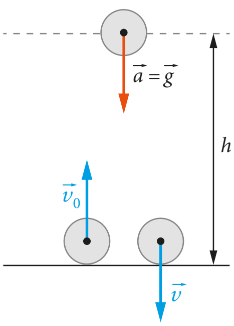



## Spadek swobodny, rzut pionowy

- Spadek swobodny i rzut pionowy to ruchy jednostajnie zmienne z przyspieszeniem równym $g$.
- **Czas**, po jakim ciało rzucone w górę osiągnie **maksymalną wysokość $h$**

$$t = \frac{v_0}{g}$$

gdzie: $g$ – wartość przyspieszenia ziemskiego, $g = 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
$\vec{v}_0$ – prędkość, z jaką ciało zostało wyrzucone do góry.



- Maksymalna wysokość, jaką osiągnie ciało rzucone w górę

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

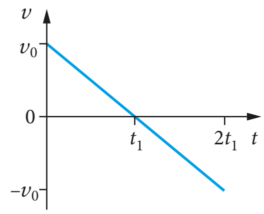
W rzucie pionowym czas wznoszenia ciała jest taki sam jak czas jego spadania.

- **Czas swobodnego spadania** ciała z wysokości $h$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

- **Prędkość**, z jaką uderzy w ziemię swobodnie spadające ciało

$$v = \sqrt{2gh}$$




- **Wykres** zależności **prędkości od czasu** dla rzutu pionowego zamieszczono obok, gdzie: $t_1$ – czas, po jakim ciało osiąga maksymalną wysokość $h$.
- **Prędkość w różnych układach odniesienia**

Jeżeli pewien układ odniesienia porusza się względem nas z prędkością $\vec{v}_u$, a w nim ciało porusza się z prędkością $\vec{v}'$, to prędkość tego ciała w naszym układzie odniesienia jest równa:

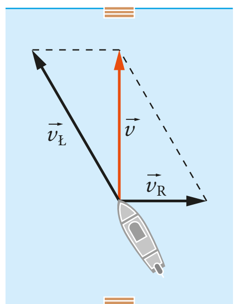
$$\vec{v} = \vec{v}_u + \vec{v}'$$

**Przykład prędkości względnej**

Jeśli masz wyznaczyć prędkość łódki względem brzegu, narysuj wektory, uwzględnij prędkość łódki względem wody i prędkość wody względem brzegu:

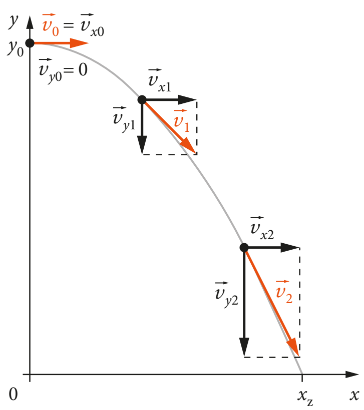
$$\vec{v} = \vec{v}_Ł + \vec{v}_R$$

gdzie: $\vec{v}$ – prędkość łódki względem brzegu, $\vec{v}_Ł$ – prędkość łódki względem wody, $\vec{v}_R$ – prędkość wody w rzece względem brzegu.




## Rzut poziomy

- **Rzut poziomy** możemy rozpatrywać jako **złożenie dwóch rodzajów ruchu**: jednostajnego w kierunku poziomym i jednostajnie przyspieszonego w kierunku pionowym.
- **Prędkość** w rzucie poziomym zilustrowano na rysunku.




$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$
$$\vec{v}_x = \text{const}$$
$$v_y = -gt$$

W rzucie poziomym składowa pozioma prędkości jest stała (ruch jednostajny), składowa pionowa prędkości zwiększa swoją wartość (ruch przyspieszony bez prędkości początkowej).

gdzie: $\vec{v}_x = \vec{v}_0$ – początkowa prędkość pozioma, $\vec{v}_y$ – prędkość pionowa po czasie $t$

W pociągu jadącym ze stałą prędkością pasażerowi wypadła z kieszeni moneta 1 zł i poruszała się pionowo do dołu. Jak wygląda ruch monety dla obserwatora związanego z ziemią?

Kod: UZN6GH

app.nowaterazmatura.pl

**Sprawdź odpowiedź**

Często na maturze

- **Współrzędne położenia ciała** w rzucie poziomym

$$x = x_0 + v_0 t$$
$$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

gdzie: $t$ – czas trwania ruchu, $(x, y)$ – współrzędne położenia ciała po czasie $t$, $(x_0, y_0)$ – współrzędne początkowe położenia ciała.

Wzory opisujące rzut pionowy i rzut poziomy wynikają z ruchów jednostajnego prostoliniowego i prostoliniowego jednostajnie zmiennego.

- **Czas spadku** ciała

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

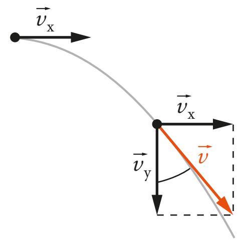
- **Zasięg rzutu** $x_z$ to różnica współrzędnych $x$ na początku i na końcu rzutu

$$x_z = v_x \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

- Wartość **prędkości końcowej** ciała $v = \sqrt{v_x^2 + 2gh}$

- **Tor** ruchu ciała w rzucie poziomym (równanie toru) dla $x_0 = 0$

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + y_0$$




Im większa prędkość początkowa ciała w rzucie poziomym, tym mniejsza wartość bezwzględna współczynnika $-\frac{g}{2v_0^2}$, czyli tym łagodniej opada ramię paraboli na wykresie.

Obejrzyj film

Kod: 8DC2JY

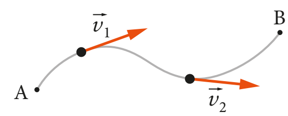
app.nowaterazmatura.pl

Tutorial: **Wektory**

Z Sprawdź w Zbiorze zadań *Jest na to sposób* s. 49

## Ruch krzywoliniowy

- **Ruch krzywoliniowy** – ruch, którego torem jest linia krzywa, a wektor prędkości chwilowej jest skierowany wzdłuż prostej stycznej do toru ruchu ciała.

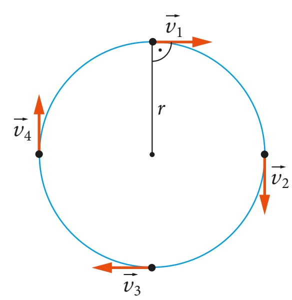



## Ruch po okręgu

- **Ruch po okręgu** – ruch, w którym tor ma kształt okręgu.

Ruch jednostajny po okręgu jest szczególnym przypadkiem ruchu krzywoliniowego.

Nie można powiedzieć, że w tym ruchu wektor prędkości liniowej jest stały, ponieważ zmienia się jego kierunek, a stała jest jedynie wartość prędkości.




*W ruchu krzywoliniowym prędkość i przyspieszenie mają różne kierunki. W przypadku ruchu jednostajnego po okręgu kąt pomiędzy wektorem prędkości a wektorem przyspieszenia jest stały. Ile wynosi ten kąt?*

Kod: 6G3GTB

app.nowaterazmatura.pl

**Sprawdź odpowiedź**

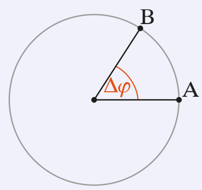
- Wyróżniamy dwa rodzaje ruchów po okręgu.

**RUCH PO OKRĘGU**
- jednostajny: $v = \text{const}$
- niejednostajny: $v \neq \text{const}$
  - przyspieszony
  - opóźniony

- **Prędkość kątową** $\omega$ definiujemy następująco:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

gdzie: $\Delta\varphi$ – zmiana kąta (patrz rys. obok), $\Delta t$ – czas trwania ruchu.




W ciągu czasu $\Delta t$ ciało przebyło po okręgu drogę z A do B, której odpowiada zmiana kąta $\Delta\varphi$.

W opisie ruchu po okręgu (prędkość kątowa, przyspieszenie kątowe) kąt podajemy w radianach, a nie w stopniach.

- **Okres** $T$ w ruchu jednostajnym po okręgu to czas jednego obrotu ciała. Na rysunku pokazano, jak w ciągu czasu $\Delta t$ ciało przebyło po okręgu drogę z A do B, której odpowiada zmiana kąta $\Delta\varphi$.

- Odwrotność okresu to **częstotliwość** $f$.

$$f = \frac{1}{T} \qquad [f] = \text{Hz}$$

- **Wartość prędkości liniowej** $v$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

gdzie: $r$ – promień okręgu, $T$ – okres, $f$ – częstotliwość.

Wzór ten jest słuszny tylko dla ruchu jednostajnego po okręgu.

- Związek między **prędkością kątową** $\omega$ **a liniową** $v$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

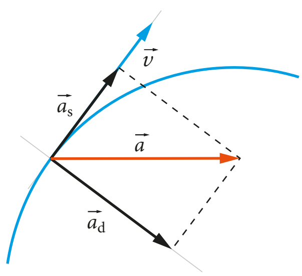
gdzie: $r$ – promień okręgu.

- **W ruchu krzywoliniowym** całkowite przyspieszenie ciała można rozłożyć na dwie składowe: prostopadłą do toru ruchu, zwaną przyspieszeniem dośrodkowym $\vec{a}_d$, i składową równoległą do toru, zwaną przyspieszeniem stycznym $\vec{a}_s$ (patrz rys. poniżej).

Składowe styczna i normalna są wzajemnie prostopadłe, dlatego wartość przyspieszenia całkowitego można wyliczyć z twierdzenia Pitagorasa.

Wektor przyspieszenia całkowitego $\vec{a}$ jest sumą jego składowych – prostopadłej $\vec{a}_d$ i stycznej $\vec{a}_s$:

$$\vec{a} = \vec{a}_d + \vec{a}_s$$




- **Przyspieszenie styczne** to składowa wektora przyspieszenia równoległa do wektora prędkości liniowej (patrz rys.). Jego wartość liczymy ze wzoru ($\varepsilon$ – przyspieszenie kątowe):

$$a_s = \varepsilon \cdot r$$

CKE Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

CKE Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

CKE Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

*Przeanalizuj wzory na przyspieszenie dośrodkowe z karty wzorów CKE.*

Kod: WP5W35
app.nowaterazmatura.pl
Sprawdź odpowiedź

CKE Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

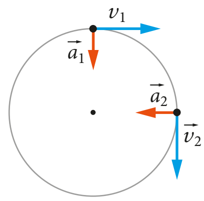
Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

- Przyspieszenie styczne jest związane ze zmianą wartości prędkości, a nie kierunku prędkości, jak to ma miejsce w przypadku przyspieszenia dośrodkowego.

- **Przyspieszenie dośrodkowe** – przyspieszenie wynikające ze zmiany kierunku prędkości.

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

gdzie: $v$ – wartość prędkości liniowej, $r$ – promień okręgu, $\omega$ – prędkość kątowa.




Przyspieszenie dośrodkowe wynika ze zmiany kierunku prędkości i występuje zawsze w ruchu po okręgu. Jest skierowane wzdłuż promienia do środka okręgu.

Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

- **Przyspieszenie kątowe** $\varepsilon$ definiujemy następująco:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad [\varepsilon] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

gdzie: $\Delta\omega$ – zmiana prędkości kątowej, $\Delta t$ – czas trwania ruchu.

(1) *Jeśli przyspieszenie kątowe $\omega$ ruchu po okręgu jest stałe, to przyspieszenie dośrodkowe rośnie wraz z upływem czasu. Dlaczego?*

- Zauważ, że przy określonym promieniu przyspieszenie dośrodkowe jest tym większe, im większa jest prędkość (liniowa lub kątowa).

Przyspieszenie kątowe opisuje zmianę prędkości kątowej (a pośrednio także zmiany wartości prędkości liniowej) i w ruchu jednostajnym po okręgu jest równe zeru.

- **Zestawienie wielkości** opisujących ruch po okręgu

| Wielkość liniowa | Wielkość kątowa | Związek między wielkością liniową i kątową |
|---|---|---|
| Przyrost drogi $\Delta s$ | Przyrost kąta $\Delta\varphi$ | $\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r}$ |
| Wartość prędkości $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ w ruchu jednostajnym po okręgu: $v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$ | Prędkość kątowa $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ w ruchu jednostajnym po okręgu: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ | $\omega = \frac{v}{r}$ |

(2) *W ruchu zmiennym po okręgu musisz znać różnice między przyspieszeniami kątowym, stycznym i dośrodkowym. Które z tych przyspieszeń będzie różne od zera, gdy ciało będzie poruszać się po okręgu ruchem jednostajnym?*

Kod: 7SMJ37

app.nowaterazmatura.pl

**Sprawdź odpowiedzi**

# Uzupełnij mapę myśli: Kinematyczne równania ruchu

## Kinematyczne równania ruchu

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

### RUCH PROSTOLINIOWY

- wektor prędkości jest skierowany ........................................
- wektor przemieszczenia jest skierowany ........................................ – do opisu wystarczy jedna współrzędna.

### JEDNOSTAJNY

$x(t) =$ ......................

### JEDNOSTAJNIE ZMIENNY

$x(t) =$ ......................

### JEŻELI ZWROTY PRZYSPIESZENIA I PRĘDKOŚCI

są ...................., **ciało przyspiesza**

są ...................., **ciało zwalnia**

### SPADEK SWOBODNY

$y(t) =$ ......................

### RZUT PIONOWY W DÓŁ

$y(t) =$ ......................

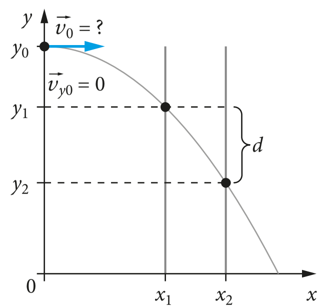
### RZUT PIONOWY W GÓRĘ

$y(t) =$ ......................

### RUCH KRZYWOLINIOWY

- wektor prędkości jest ........................................ i można go rozłożyć na składowe.
- ........................................ nie musi być skierowany wzdłuż osi przyjętego układu współrzędnych.

### RZUT POZIOMY




Ciało zostaje wystrzelone poziomo z prędkością początkową $v_0$ i przebija dwie kartki papieru umieszczone w odległościach $x_1$ i $x_2$. Odległość między miejscami, w których pocisk przebił kartki, wynosi $d$.

Zapisz równania ruchu i znajdź $v_0$.

$x(t) =$ .............. $y(t) =$ .............. $v_0 =$ ..............

........................ ........................ ........................

........................ ........................ ........................

Sprawdź
app.nowaterazmatura.pl
**Kod: GFLRVX**
**Rozwiązanie mapy myśli**

Poćwicz z fiszkami
app.nowaterazmatura.pl
**Kod: GFT6K5**
Fiszki: **Kinematyka**

Rozwiąż test
app.nowaterazmatura.pl
**Kod: V2ZPHS**
Test: **Kinematyka**

Sprawdź

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: Z121SD**
**Dodatkowe przykłady CKE**

# Zadania maturalne ze wskazówkami i rozwiązaniami

## Przykład 1.

### Zadanie 1.

CKE MAJ 2017

Podczas prób testowych kierowca samochodu jadący po poziomym prostym torze z prędkością $50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ rozpoczął hamowanie bez poślizgu ze stałym opóźnieniem i zatrzymał się po przebyciu 12 m. Czas reakcji kierowcy pomijamy oraz przyjmujemy, że współczynnik tarcia statycznego opon o jezdnię jest większy od analogicznego współczynnika tarcia kinetycznego.

### Zadanie 1.1 (0–2)

CKE MAJ 2017

**Oblicz czas hamowania samochodu. Wynik podaj w sekundach.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZAMI

Samochód porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym. Zastosujemy więc wzory na drogę i prędkość w ruchu jednostajnie zmiennym:

$$v = v_{01} - a \cdot t \qquad (1)$$

$$s = v_{01} \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (2)$$

Znajdziesz to w Karcie wzorów s. 16 z 20

W powyższym wzorze uwzględniliśmy, że jest to ruch jednostajnie opóźniony

Przyjęliśmy oznaczenia: $a$ – wartość opóźnienia, $v_{01}$ – wartość prędkości początkowej.

$$v_{01} = 50\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \approx 13{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Z treści zadania wiemy, że samochód się zatrzymał, co oznacza, że prędkość końcowa jest równa zeru. Upraszcza to pierwszy z powyższych wzorów:

$$0 = v_{01} - a \cdot t$$

W zapisanym wcześniej wzorze (1) na prędkość mieliśmy funkcję $v(t)$, gdzie $t$ było dowolną chwilą czasu. We wzorze powyżej litera $t$ oznacza już konkretny czas – miejsce zerowe funkcji, czyli czas hamowania.

Zauważmy, że mamy informację o prędkości początkowej $v_{01}$ oraz przebytej drodze $s$. Musimy wyznaczyć czas $t$. Nie podano natomiast informacji o wartości opóźnienia. Nie musimy jej jednak wyznaczać w tej części zadania. W tej sytuacji najlepiej wyeliminować wartość opóźnienia z podanych równań.

Wyznaczamy wartość opóźnienia ze wzoru na prędkość: $0 = v_{01} - a \cdot t$, i otrzymujemy:

$$a = \frac{v_{01}}{t}$$

Wstawiamy tak wyznaczoną wartość opóźnienia do wzoru (2) na drogę:

$$s = v_{01} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_{01}}{t} \cdot t^2$$

Dostajemy ostatecznie zależność:

$$s = \frac{1}{2} v_{01} \cdot t$$

Przekształcamy powyższy wzór, aby otrzymać czas:

$$t = \frac{2s}{v_{01}}$$

Pamiętaj, aby przed podstawieniem danych liczbowych zamienić prędkość początkową z $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ na $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

$$t = \frac{2 \cdot 12\ \text{m}}{13{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1{,}73\ \text{s}$$

**Odpowiedź:** Czas hamowania samochodu to $1{,}73$ s.

Uwaga. To zadanie dużo łatwiej rozwiązać metodą graficzną – wystarczy narysować wykres prędkości od czasu i obliczyć pole pod nim.

### Punktacja:

2 pkt – prawidłowa metoda rozwiązania i prawidłowy wynik liczbowy z jednostką,

1 pkt – prawidłowa metoda pozwalająca wyznaczyć czas hamowania samochodu

LUB

– prawidłowa metoda i prawidłowe obliczenie wartości opóźnienia (ok. 8,05 $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ w zależności od przyjętego zaokrąglenia wartości prędkości początkowej $v_0 = 13{,}9\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$),

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

**WARTO ZAPAMIĘTAĆ**

- ✓ W zadaniach z kinematyki szczególną uwagę zwracaj na jednostki (prędkości, czasu, drogi).
- ✓ Często przy wykonywaniu kolejnego punktu można wykorzystać obliczenia przeprowadzone w podpunkcie poprzednim.

## Zadanie 1.3 (0–3)

CKE MAJ 2017

W kolejnej próbie samochód jadący z prędkością początkową $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ rozpoczął hamowanie z opóźnieniem takim samym jak poprzednio i po przejechaniu $12$ m uderzył w przeszkodę.

**Oblicz, z jaką prędkością samochód uderzył w przeszkodę.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZAMI

**Sposób 1.**

W tym przypadku również mamy do czynienia z ruchem jednostajnie opóźnionym, jednak prędkość końcowa, którą chcemy wyznaczyć, nie będzie równa $0$. Równania przyjmą postać:

$$v = v_{02} - a \cdot t \qquad (1)$$

$$s = v_{02} \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 \qquad (2)$$

Oznaczenia:
$a$ – wartość opóźnienia,
$v_{02}$ – wartość prędkości początkowej

Zauważamy, że w tym przypadku nie mamy informacji o czasie ruchu, nie jest również podana wartość opóźnienia. Jednak z treści zadania wiemy, że opóźnienie jest takie samo jak w zadaniu 1.1. Łatwo zauważyć, że możemy je obliczyć: prędkość początkową podaną w zadaniu 1.1 dzielimy przez obliczony czas trwania ruchu. Nie mamy zatem informacji o czasie trwania ruchu, ale nie musimy go wyznaczać w tym zadaniu. Wobec tego w powyższych równaniach wyeliminujemy czas.

$$v_{02} = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 16{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Wyznaczamy czas z równania (1):

$$t = \frac{v_{02} - v}{a}$$

Wstawiamy tak zapisany wzór na czas do wzoru (2) na drogę:

$$s = v_{02} \cdot \frac{v_{02} - v}{a} - \frac{1}{2}a \cdot \left(\frac{v_{02} - v}{a}\right)^2$$

W kolejnych przekształceniach otrzymujemy:

$$s = \frac{v_{02}^2 - v_{02} \cdot v}{a} - \frac{1}{2}a \cdot \frac{v_{02}^2 - 2v_{02} \cdot v + v^2}{a^2}$$

$$s = \frac{v_{02}^2 - v^2}{2a}$$

Z powyższego wzoru wyznaczamy prędkość końcową:

$$v = \sqrt{v_{02}^2 - 2a \cdot s} \qquad (3)$$

Pozostało jeszcze wyznaczenie przyspieszenia na podstawie danych zawartych w zadaniu 1.1:

$$a = \frac{v_{01}}{t}$$

Korzystamy ze wzoru wyprowadzonego w zadaniu 1.1 na s. 51:

$$t = \frac{2s}{v_{01}}$$

Dostajemy ostatecznie:

$$a = v_{01} \cdot \frac{v_{01}}{2s} = \frac{v_{01}^2}{2s}$$

Wyprowadzoną zależność na przyspieszenie podstawiamy do wzoru (3) na prędkość końcową:

$$v = \sqrt{v_{02}^2 - 2 \cdot \frac{v_{01}^2}{2s} \cdot s}$$

$$v = \sqrt{v_{02}^2 - v_{01}^2}$$

Podstawiamy dane do wzoru na prędkość końcową i otrzymujemy:

$$v = \sqrt{\left(16{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 - \left(13{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2} = 9{,}26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

W złożonych zadaniach, takich jak to, należy zastosować odpowiednie oznaczenia na poszczególne wielkości fizyczne. Często będziemy zmuszeni używać wielu indeksów (np. na odróżnienie dwóch prędkości początkowych) oraz odwoływać się do wyników uzyskanych w poprzednich punktach. Najważniejszy będzie przejrzysty zapis, pozwalający nie pogubić się w dużej ilości danych oraz łatwo wyeliminować ewentualny błąd (np. zamiana + i –).

**Sposób 2.**

Zadanie to można rozwiązać również z zależności między wykonaną pracą i zmianą energii. Pamiętamy, że:

zmiana energii kinetycznej = praca sił tarcia

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = W_{\mathrm{T}}$$

W pierwszym przypadku (czyli dla hamowania od 50 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ do zera) możemy zapisać:

$$0 - \frac{mv_{01}^2}{2} = W_{\mathrm{T}} \qquad (1)$$

W drugim przypadku siła tarcia wykonała taką samą pracę (hamowanie z takim samym przyspieszeniem ciała o takiej samej masie na tej samej drodze), zatem:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_{02}^2}{2} = W_{\mathrm{T}} \qquad (2)$$

Porównujemy lewe strony powyższych wzorów (1) i (2) i dzielimy obustronnie przez $\frac{m}{2}$. Otrzymujemy:

$$0 - \frac{mv_{01}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_{02}^2}{2}$$

$$-v_{01}^2 = v^2 - v_{02}^2$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy końcowy wzór, taki sam jak w rozwiązaniu sposobem 1.

$$v = \sqrt{v_{02}^2 - v_{01}^2}$$

**Odpowiedź:** Samochód uderzy w przeszkodę z prędkością o wartości 9,26 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

**Punktacja:**

3 pkt – prawidłowa metoda rozwiązania i prawidłowy wynik liczbowy z jednostką,
2 pkt – prawidłowa metoda prowadząca do wyznaczenia prędkości końcowej oraz uzyskanie prawidłowego wzoru na tę prędkość końcową, pozwalającego na bezpośrednie uzyskanie wyniku z danych,
1 pkt – prawidłowa metoda prowadząca do wyznaczenia prędkości końcowej (zapisanie niezbędnych równań),
0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

**WARTO ZAPAMIĘTAĆ**

✓ Jeśli rozwiązujesz złożone zadanie i stosujesz wzory na prędkość oraz drogę w ruchu jednostajnie zmiennym, kieruj się zasadami:

- eliminuj te wielkości, które nie są podane w treści oraz których nie trzeba wyznaczyć,
- wielkości fizyczne wylicz z równania prostszego (wzór na prędkość) i wstaw do trudniejszego (wzór na drogę).

✓ Jeśli w zadaniach dotyczących ruchu jednostajnie zmiennego mamy podaną drogę, jedną z prędkości (końcową lub początkową) oraz przyspieszenie, a nie mamy podanego czasu, to łatwiej jest skorzystać z zależności:

wykonana praca = zmiana energii.

## Przykład 2.

### Zadanie (0–2)

Spoczywający początkowo sportowy motocykl zaczyna poruszać się z przyspieszeniem równym połowie przyspieszenia ziemskiego.

**Wybierz poprawną odpowiedź spośród poniższych i podaj jej uzasadnienie.**

Motocykl przebędzie drogę $20\ \mathrm{m}$ w czasie:

**A.** czterokrotnie dłuższym niż ciało spadające swobodnie z wysokości $20\ \mathrm{m}$.

**B.** ok. 1,4 raza dłuższym niż ciało spadające swobodnie z wysokości $20\ \mathrm{m}$.

**C.** ok. 2,8 razy dłuższym niż ciało spadające swobodnie z wysokości $20\ \mathrm{m}$.

**D.** dwukrotnie dłuższym niż ciało spadające swobodnie z wysokości $20\ \mathrm{m}$.

**Rozwiązanie:** B

### Uzasadnienie

Korzystamy ze wzoru na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej.

Dla ruszającego motocykla mamy:

$$s = \frac{1}{2}a(t_1)^2$$

natomiast dla spadającego ciała:

$$s = \frac{1}{2}g(t_2)^2$$

Porównujemy prawe strony wzorów:

$$\frac{1}{2}a(t_1)^2 = \frac{1}{2}g(t_2)^2$$

Z treści zadania wynika, że $a = \frac{1}{2}g$, mamy więc:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}g(t_1)^2 = \frac{1}{2}g(t_2)^2$$

Po uproszczeniu otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(t_1)^2 = (t_2)^2$$

Pierwiastkujemy obie strony równania:

$$t_1 = \sqrt{2}\,t_2$$

$$t_1 \approx 1{,}4t_2$$

**Punktacja:**

2 pkt – zaznaczenie poprawnej odpowiedzi i przedstawienie poprawnego toku rozumowania,
1 pkt – niezaznaczenie poprawnej odpowiedzi, ale przedstawienie poprawnego rozwiązania,
0 pkt – zaznaczenie błędnej odpowiedzi lub brak zaznaczenia.

**WARTO ZAPAMIĘTAĆ**

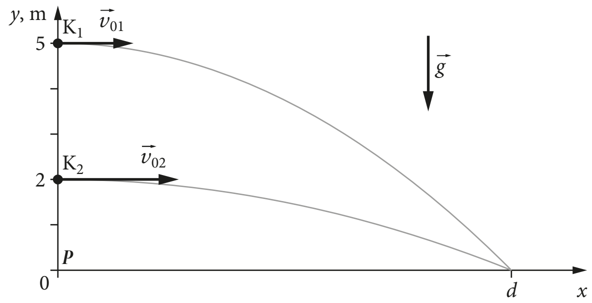
- ✓ Spadek swobodny na Ziemi jest ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem $g \approx 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
- ✓ W ruchu jednostajnie przyspieszonym bez prędkości początkowej przebyta droga jest wprost proporcjonalna do kwadratu czasu.

## Przykład 3.

### Zadanie 1. CKE MAJ 2021

Często na maturze

Z wysokości $h_1 = 5{,}0$ m ponad punktem P rzucono kulkę $K_1$. Kulka upadła na poziome podłoże w odległości $d$ od punktu P i potoczyła się dalej. Następnie z wysokości $h_2 = 2{,}0$ m ponad punktem P rzucono taką samą kulkę $K_2$. Druga kulka upadła także w odległości $d$ od punktu P. Prędkości początkowe $\vec{v}_{01}$ i $\vec{v}_{02}$ kulek w każdym rzucie miały kierunki poziome i leżały w tej samej płaszczyźnie. Na poniższym rysunku zilustrowano tory ruchu kulek w układzie współrzędnych $(x, y)$ – bez skali na osi $x$. Punkt P jest początkiem tego układu współrzędnych.




W zadaniach 1.1–1.2 pomiń opory ruchu oraz przyjmij do obliczeń, że przyspieszenie ziemskie ma wartość $g = 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

### Zadanie 1.1 (0–2) CKE MAJ 2021

**Oblicz iloraz $\frac{v_{01}}{v_{02}}$ – wartości prędkości początkowej kulki $K_1$ i wartości prędkości początkowej kulki $K_2$.** Wynik liczbowy podaj zaokrąglony do dwóch cyfr znaczących.

**PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM**

Rzut poziomy jest złożeniem ruchu jednostajnego w kierunku osi $x$ oraz spadku swobodnego w kierunku osi $y$. Skoro w kierunku poziomym mamy do czynienia z ruchem jednostajnym, to możemy skorzystać z zależności między drogą, czasem i prędkością w tym ruchu. Przebyta droga w kierunku $x$ będzie równa zasięgowi, który jest oznaczony na wykresie literą $d$.

Dla ciała wyrzuconego z prędkością $v_{01}$ możemy zapisać:

$$v_{01} = \frac{d}{t_1}$$

gdzie $t_1$ – czas lotu pierwszej kulki, $d$ – zasięg lotu.

Analogicznie dla ciała wyrzuconego z prędkością $v_{02}$ możemy zapisać:

$$v_{02} = \frac{d}{t_2}$$

gdzie $t_2$ – czas lotu drugiej kulki.

Iloraz prędkości jest równy:

$$\frac{v_{01}}{v_{02}} = \frac{\frac{d}{t_1}}{\frac{d}{t_2}}, \quad \text{czyli} \quad \frac{v_{01}}{v_{02}} = \frac{t_2}{t_1} \qquad (1)$$

Czasy lotu kulki będą równe jej czasom spadku swobodnego z wysokości $h_1 = 5$ m oraz $h_2 = 2$ m.

Stosujemy wzór na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym, w którym przebyta droga jest wysokością, z jakiej spada kulka, natomiast przyspieszenie jest równe przyspieszeniu ziemskiemu:

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2} \qquad h_2 = \frac{gt_2^2}{2}$$

Wyznaczamy z tych wzorów czasy spadania obu kulek:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

Podstawiamy je do wzoru (1) na iloraz prędkości:

$$\frac{v_{01}}{v_{02}} = \frac{\sqrt{\frac{2h_2}{g}}}{\sqrt{\frac{2h_1}{g}}}, \text{ stąd: } \frac{v_{01}}{v_{02}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$\frac{v_{01}}{v_{02}} = \sqrt{\frac{2\ \mathrm{m}}{5\ \mathrm{m}}} \approx 0{,}63$$

**Odpowiedź:** Iloraz prędkości $\frac{v_{01}}{v_{02}}$ jest równy ok. $0{,}63$.

**Punktacja:**

2 pkt – poprawna metoda obliczenia ilorazu wartości prędkości oraz prawidłowy wynik podany w zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących,

1 pkt – poprawne zapisanie lub wyprowadzenie wzoru na zasięg (z wyeliminowanym czasem) w rzucie poziomym oraz przyrównanie zasięgów obu rzutów

LUB

– wykorzystanie równości zasięgów, np. zapisanie równania: $v_{01}t_1 = v_{02}t_2$ oraz poprawne wyprowadzenie lub zapisanie wzorów na czas lotu obu kulek,

LUB

– wykorzystanie równości zasięgów, np. zapisanie równania: $v_{01}t_1 = v_{02}t_2$, oraz poprawne obliczenie czasu lotu jednej z kulek,

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

**WARTO ZAPAMIĘTAĆ**

- ✓ Rzut poziomy w jednorodnym polu grawitacyjnym jest złożeniem spadku swobodnego w kierunku pionowym oraz ruchu jednostajnego w kierunku poziomym.
- ✓ Czas lotu w rzucie poziomym jest taki sam jak czas spadku swobodnego ciała upuszczonego z tej samej wysokości.
- ✓ Jeśli znasz dokładny kształt toru ruchu w przypadku rzutu poziomego (a więc możliwość odczytania wysokości i zasięgu), możesz obliczyć początkową prędkość, z jaką wyrzucono ciało.

**Zadanie 1.2 (0–3)** CKE MAJ 2021

Wartości prędkości początkowej kulki $\mathrm{K}_1$ wynosi $v_{01} = 7{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

**Oblicz wartość $v_{01}$ prędkości kulki $\mathrm{K}_1$ tuż przed uderzeniem w poziome podłoże.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

**Sposób 1.**

Prędkość kulki można rozłożyć na dwie składowe: w kierunku $x$ – ta składowa nie ulega zmianie, ponieważ w tym kierunku na kulkę nie działa żadna siła, oraz w kierunku $y$ – ta składowa zmienia się tak jak w spadku swobodnym.

Prędkość końcową w kierunku $y$ zapiszemy za pomocą wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie przyspieszonym:

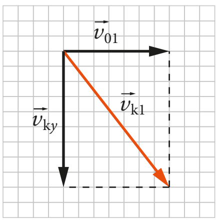
$$v_{ky} = gt_1$$

gdzie $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$ – czas spadania kulki.

Po podstawieniu wyrażenia na czas spadku kulki dostajemy:

$$v_{ky} = g \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2h_1 g} \qquad (1)$$

Składowe prędkości kulki są do siebie prostopadłe, więc wartość prędkości końcowej obliczymy ze wzoru na długość wektora (twierdzenie Pitagorasa):




$$v_{k1}^2 = v_{01}^2 + v_{ky}^2$$

$$v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{ky}^2}$$

Pod $v_{ky}$ podstawiamy wzór (1):

$$v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + 2h_1 g}$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy:

$$v_{k1} = \sqrt{\left(7{,}9\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2 \cdot 5\,\text{m} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 12{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Sposób 2.**

W treści zadania podano, że pomijamy opory ruchu, więc skorzystamy z zasady zachowania energii.

Dla ułatwienia przyjmijmy, że w miejscu, gdzie spadła kulka $\text{K}_1$, energia potencjalna jest równa 0. Energia początkowa będzie więc sumą energii kinetycznej kulki oraz jej energii potencjalnej grawitacji:

$$E_{pocz} = \frac{mv_{01}^2}{2} + mgh_1$$

Oznaczenia takie same jak przyjęte wcześniej.

Energia końcowa będzie energią kinetyczną, jaką kulka uzyska tuż przed uderzeniem w ziemię.

$$E_{końc} = \frac{mv_{k1}^2}{2}$$

Korzystamy z zasady zachowania energii:

$$E_{pocz} = E_{końc}$$

$$\frac{mv_{01}^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_{k1}^2}{2}$$

Dzielimy obie strony równania przez $\frac{m}{2}$ i dostajemy:

$$v_{k1}^2 = v_{01}^2 + 2gh_1$$

W ten sposób otrzymujemy to samo równanie końcowe co w sposobie 1.

$$v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + 2h_1 g}$$

**Odpowiedź:** Kulka $K_1$ upadnie na ziemię z prędkością $12{,}7\ \frac{m}{s}$.

**Punktacja:**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości końcowej kulki $K_1$ (z zasady zachowania energii lub z równań ruchu) oraz prawidłowy wynik liczbowy z jednostką,

2 pkt – poprawne zapisanie równania wynikającego z zasady zachowania energii mechanicznej kulki $K_1$, z którego można bezpośrednio obliczyć prędkość końcową kulki $K_1$,

LUB

– zapisanie wzoru na prędkość końcową kulki $K_1$ w postaci: $v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{ky}^2}$ oraz uwzględnienie (zapisanie lub wyprowadzenie z równań ruchu albo zasady zachowania energii), że $v_{ky} = \sqrt{2gh_1}$,

LUB

– zapisanie równania: $v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + (gt_1)^2}$ (może być w formie z podstawionymi wartościami liczbowymi lub jako równanie podniesione obustronnie do kwadratu) oraz poprawne obliczenie czasu trwania ruchu $t_1 \approx 1{,}0$ s,

1 pkt – wykorzystanie zasady zachowania energii mechanicznej: przyrównanie energii mechanicznej początkowej do energii mechanicznej końcowej łącznie z identyfikacją energii początkowej jako sumy energii kinetycznej i potencjalnej, a energii końcowej jako energii kinetycznej (np. podobnie jak w sposobie 1.), gdy poziom zerowej energii potencjalnej jest dla $h = 0$,

LUB

– zapisanie wzoru na prędkość końcową kulki $K_1$ w postaci: $v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + v_{ky}^2}$ oraz skorzystanie ze związku: $v_{ky} = gt_1$, przy czym mogą to być oddzielne zapisy lub jedno równanie równoważne: $v_{k1} = \sqrt{v_{01}^2 + (gt_1)^2}$

0 pkt – brak spełnienia powyższych kryteriów.

**WARTO ZAPAMIĘTAĆ**

✓ Zasięg w rzucie poziomym jest proporcjonalny do prędkości początkowej i do pierwiastka wysokości (czterokrotnie większa wysokość to dwa razy większy zasięg przy tej samej prędkości początkowej).

✓ W trakcie trwania rzutu poziomego pionowa składowa prędkości rośnie proporcjonalnie do czasu trwania ruchu (tak jak w spadku swobodnym).

✓ Końcową prędkość w rzucie poziomym często wygodniej oblicza się z zasady zachowania energii.

Rozwiąż

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: A64XQ2**
**Dodatkowe zadania CKE**

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

### Zadanie 1.

Pociąg potrzebuje $400\ \mathrm{m}$, aby wyhamować od prędkości $80\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ do zera.

### Zadanie 1.1 (0–2)

Zakładamy, że podczas hamowania pociąg porusza się ruchem jednostajnie opóźnionym. **Oblicz czas hamowania pociągu**.

### Zadanie 1.2 (0–3)

Ten sam pociąg jedzie z prędkością $120\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ i przed odcinkiem torów o gorszej jakości musi zwolnić do $90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$. **Oblicz, jaka droga jest potrzebna do wykonania tego manewru, jeżeli wartość opóźnienia pociągu jest taka sama jak w zadaniu 1.1.**

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: RF6RAF**
**Rozwiązania zadań 1.–3.**

**Przykład 1.**, patrz s. 46

**Obejrzyj film**

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: A4A9A5**
Tutorial: **Rozwiązanie zadania 1.**

# 1. Korzystanie z praw fizyki

## Wstęp

### CO SPRAWDZAJĄ ZADANIA TEGO TYPU

✓ Zadania te sprawdzają, czy opanowałeś pojęcia i prawa fizyki. Ważna jest także umiejętność ich wykorzystania do wyjaśniania procesów i zjawisk zachodzących w przyrodzie.

✓ Zadania zamknięte wymagają wyboru poprawnej odpowiedzi, a zadania otwarte – sformułowania krótkiej odpowiedzi słownej. W krótkiej odpowiedzi najczęściej należy wyjaśnić przebieg zjawiska, zastosować zjawisko fizyczne lub opisać jego dalszy przebieg przy podanych parametrach początkowych.

✓ W odpowiedziach należy pamiętać o:
- trafnym doborze fizycznych argumentów, które wyjaśniają problem występujący w zadaniu,
- logice i zwięzłości przekazywanych informacji,
- poprawności językowej i użytej terminologii,
- umiejętności selekcji informacji zawartych w zadaniach.

### JAKICH POLECEŃ MOŻESZ SIĘ SPODZIEWAĆ

Zadania dotyczące tego wymagania ogólnego są bardzo często **zadaniami zamkniętymi**, mogą się w nich pojawić następujące polecenia:

✓ **porównaj** tę samą wielkość fizyczną w dwóch procesach, ruchach, zjawiskach, np. uzupełnij tabelę jednym ze znaków: $<$, $=$, $>$,

✓ **uzupełnij**, np. tabelę (tutaj może chodzić o porównanie wielkości fizycznych), wniosek, zdanie,

✓ **oceń** prawdziwość zdań (zadania zamknięte typu prawda-fałsz),

✓ **dobierz**, np. z listy podanych wielkości, uzupełnij wniosek,

✓ **dokończ**, np. zdanie,

✓ **uzupełnij** lub wybierz poprawną odpowiedź, tak aby informacja była prawdziwa,

✓ **zaznacz** poprawną odpowiedź,

✓ **wybierz**, np. poprawną odpowiedź spośród wszystkich możliwości, poprawne wnioski, uzupełnienia zdania czy wzory.

**Zadania otwarte** tego typu są najczęściej zadaniami wymagającymi krótkiej odpowiedzi z następującymi poleceniami:

✓ **podaj**, np. poprawną jednostkę wielkości fizycznej czy wzór,

✓ **uzasadnij**, np. zapisując odpowiednie prawa fizyki, za pomocą których możemy wyjaśnić dane zjawisko,

✓ **wyjaśnij**, np. powołując się na prawa fizyki, dlaczego zachodzi dany proces,

✓ **zapisz**, np. prawa, z których korzystamy, wyjaśniając jakieś zjawisko.

Zwróć uwagę, że w tego typu zadaniach będziesz korzystać z różnych zasad zachowania, warunków równowagi oraz pewnych przypadków granicznych. Tych treści w większości nie znajdziesz w karcie wzorów, więc musisz je sobie utrwalić, rozwiązując możliwie największą liczbę różnorodnych zadań zawierających te elementy.

# Zadania maturalne ze wskazówkami i rozwiązaniami

## Przykład 1.

**Zadanie 3.** CKE MARZEC 2022

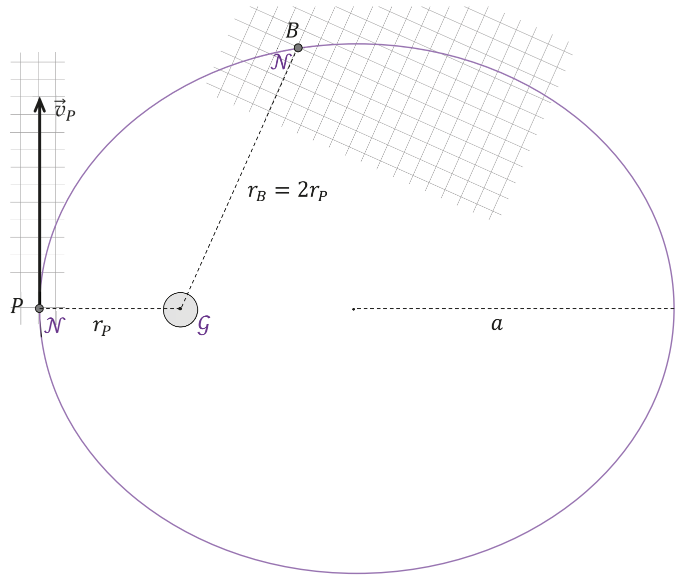
Ciało niebieskie $N$ krąży wokół gwiazdy macierzystej $G$ po orbicie eliptycznej. Długość półosi wielkiej tej orbity eliptycznej jest równa $a = 6\ \mathrm{au}$. Na rysunku poniżej przedstawiono położenia ciała, gdy przechodzi ono przez punkt $P$ (perycentrum orbity) oraz gdy przechodzi ono przez punkt $B$. Prędkość ciała w punkcie $P$ wynosi $\vec{v}_\mathrm{P}$. Odległość punktu $P$ od środka gwiazdy jest równa $r_\mathrm{P}$, natomiast odległość punktu B od środka gwiazdy jest równa $r_\mathrm{B} = 2r_\mathrm{P}$. Długość boku kratki odpowiada umownej jednostce prędkości.

Do analizy zagadnienia przyjmij model zjawiska, w którym:

• ciało $N$ traktujemy jako punkt materialny

• przyjmujemy, że ciało $N$ oddziałuje jedynie z gwiazdą $G$

• przyjmujemy, że środek masy układu przypada w środku gwiazdy $G$.




**Zadanie 3.1 (0–3)** CKE MARZEC 2022

**Na rysunku powyżej <u>skonstruuj i narysuj</u> $\vec{v}_\mathrm{B}$ – wektor prędkości ciała w punkcie B. Uwzględnij poprawny kierunek i zwrot prędkości $\vec{v}_\mathrm{B}$ oraz proporcje między wartościami wektorów $\vec{v}_\mathrm{B}$ i $\vec{v}_\mathrm{p}$. Poniżej <u>opisz i uzasadnij</u> krótko etapy konstrukcji – powołaj się na odpowiednie prawa / zależności fizyczne uzasadniające konstrukcję.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

W rozwiązaniu zadania skorzystamy z zasady zachowania momentu pędu. W centralnym polu grawitacyjnym moment pędu jest zachowany, ponieważ na punktowy obiekt w takim polu nie działa żaden moment siły (mimo że działa siła grawitacji). Dzieje się tak dlatego, że wektor siły jest zawsze równoległy do wektora wodzącego (ramienia siły), czyli wektora łączącego centrum siły z punktem, w którym aktualnie znajduje się poruszające się ciało.

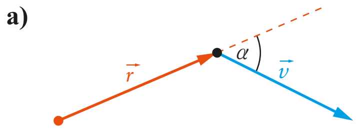
Zastosujmy ogólny wzór na wartość momentu pędu punktu materialnego: $L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin\sphericalangle(\vec{r}, \vec{v})$.

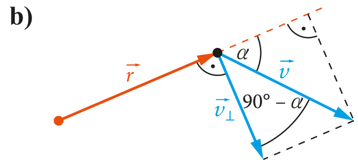
Wyrazimy tę wielkość nie poprzez kąt, ale poprzez odpowiednią składową prędkości. Oznaczmy kąt pomiędzy wektorem $\vec{r}$ oraz $\vec{v}$ jako $\alpha$ (patrz rys. a).

→ **Wartość momentu pędu,** patrz s. 93

Wzór na wartość momentu pędu można więc zapisać w postaci:

$$L = m \cdot v \cdot r \cdot \sin \alpha \qquad (1)$$




Rozłóżmy wektor prędkości $\vec{v}$ na składową $\vec{v}_\perp$ prostopadłą do promienia wodzącego $\vec{r}$ (rys. b) oraz składową równoległą do $\vec{r}$ (której nie zaznaczamy na rys. b).

Z definicji funkcji sinus oraz rysunku b) zapisujemy:

$$\frac{v_\perp}{v} = \sin \alpha$$

Po przekształceniu mamy:

$$v_\perp = v \cdot \sin \alpha$$

Wzór (1) na wartość momentu pędu dla punktu materialnego przyjmuje postać:

$$L = m \cdot r \cdot v_\perp$$

Oznaczenia: $v_B$ – wartość prędkości w punkcie B, $v_{\perp B}$ – wartość składowej prędkości w punkcie B prostopadłej do promienia wodzącego.

Z zasady zachowania pędu otrzymujemy:

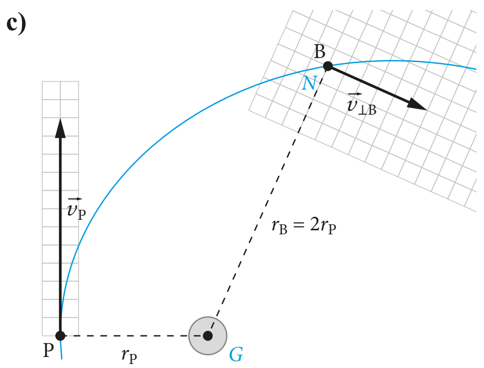
$$L_P = L_B$$
$$m \cdot v_P \cdot r_P = m \cdot v_{\perp B} \cdot r_B$$

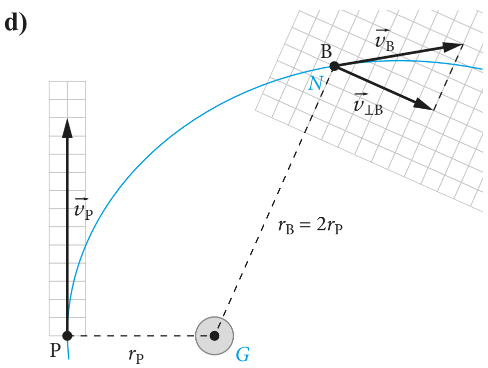
Z treści zadania wiemy, że $r_B = 2r_P$, zatem:

$$v_{\perp B} = \frac{1}{2} \cdot v_P$$

Przeprowadzimy teraz krok po kroku konstrukcję wektora $\vec{v}_B$. Skorzystamy z faktu, że wektor prędkości jest zawsze styczny do toru ruchu ciała. Rozwiązanie zamieszczono na rysunkach c) i d).

1) Zaznaczamy na rysunku składową $\vec{v}_{\perp B}$ – długość tego wektora będzie dwukrotnie mniejsza niż wektora $\vec{v}_P$, a więc równa 6 kratek. Składowa $\vec{v}_{\perp B}$ będzie skierowana prostopadle do wektora $\vec{r}_B$ (rys. c).




2) Rysujemy wektor $\vec{v}_B$ tak, aby był styczny do elipsy w punkcie B oraz aby jego składowa prostopadła do promienia wodzącego $\vec{r}_B$ miała długość 6 kratek (rys. d).

**Punktacja:**

3 pkt – poprawna metoda konstrukcji oraz poprawny opis i uzasadnienie konstrukcji wektora prędkości w punkcie B,

2 pkt – zapisanie zasady zachowania momentu pędu: przyrównanie momentu pędu w punkcie P do momentu pędu w punkcie B oraz użycie wzorów na moment pędu oraz narysowanie wektora w punkcie B prostopadłego do promienia wodzącego o wartości dwukrotnie mniejszej od wartości wektora $\vec{v}_P$. Oznaczenia na rysunku i we wzorach muszą być ze sobą zgodne oraz zgodne z treścią zadania,

1 pkt – poprawne zapisanie zasady zachowania momentu pędu: przyrównanie momentu pędu w punkcie P do momentu pędu w punkcie B oraz użycie wzorów na moment pędu (oznaczenie we wzorze wartości składowej prędkości w punkcie B musi być różne od $v_B$)

LUB

– narysowanie wektora w punkcie B prostopadłego do promienia wodzącego o wartości dwukrotnie mniejszej od wartości wektora $\vec{v}_P$ (bez uzasadnienia i opisu),

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, lub brak rozwiązania.

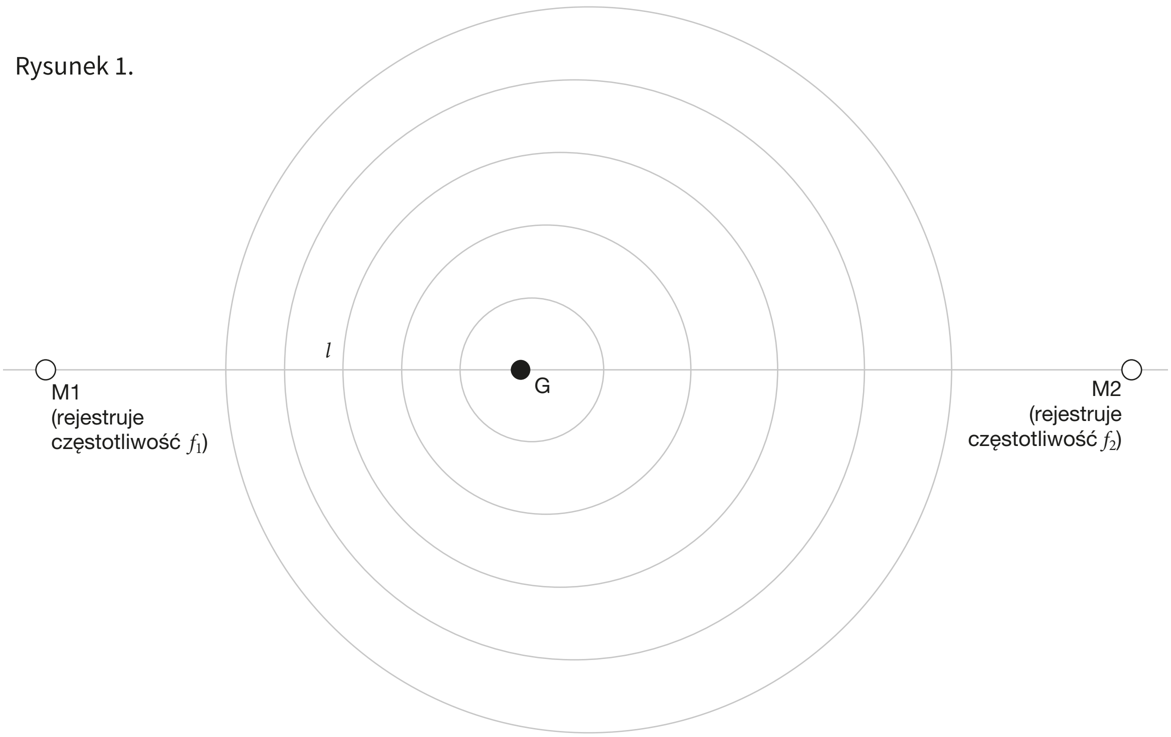
## Przykład 2.

**Zadanie 4.** CKE MARZEC 2022

Głośnik G poruszał się z prędkością o stałej wartości $v$ po prostoliniowym torze $l$ pomiędzy nieruchomymi mikrofonami M1 i M2 (zobacz rysunek 1.). Podczas tego ruchu głośnik wytwarzał dźwięk o stałej częstotliwości $f_0$ – tzn. membrana głośnika drgała z częstotliwością $f_0$. Mikrofony M1 i M2 rejestrowały w tym czasie częstotliwości – odpowiednio – $f_1$ oraz $f_2$ dźwięku docierającego do nich z głośnika G.

Na rysunku 1. przedstawiono fragment chwilowego obrazu powierzchni falowych tego dźwięku w powietrzu w układzie odniesienia związanym z ziemią.

Rysunek 1.




**Zadanie 4.2 (0–4)** CKE MARZEC 2022

Prędkość dźwięku w powietrzu ma wartość $v_d = 340\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**Oblicz prędkość głośnika G w sytuacji przedstawionej na rysunku 1. Zapisz obliczenia.**

*Uwaga! Niektóre dane liczbowe są zawarte w proporcjach odległości na rysunku. W celu rozwiązania zadania 4.2. wykonaj odpowiednie pomiary linijką – z dokładnością do 1 mm.*

## PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

Symbol linijki przy zadaniu sugeruje, że musimy wykonać pomiary pewnych wielkości na rysunku. Z rysunku łatwo wywnioskować, że głośnik G przemieszcza się w lewo, ponieważ powierzchnie falowe z lewej strony znajdują się bliżej siebie niż powierzchnie falowe z prawej strony.

Oznaczmy: $\lambda_1$ – długość fali, jaką rejestruje mikrofon M1, $\lambda_2$ – długość fali, jaką rejestruje mikrofon M2, $v_d$ – prędkość dźwięku, $v_{źr}$ – prędkość źródła, $f_0$ – częstotliwość fali emitowanej przez głośnik.

Zapiszmy wzory dla efektu Dopplera, gdy głośnik zbliża się do nieruchomego mikrofonu M1 i oddala się od nieruchomego mikrofonu M2.

$$f_1 = f_0 \cdot \frac{v_d}{v_d - v_{źr}} \qquad f_2 = f_0 \cdot \frac{v_d}{v_d + v_{źr}}$$

Podzielmy powyższe równania stronami:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v_d + v_{źr}}{v_d - v_{źr}}$$

Prędkość fali dla powierzchni falowych przemieszczających się w lewo to:

$$v_d = \lambda_1 \cdot f_1$$

a dla powierzchni falowych przemieszczających się w prawo:

$$v_d = \lambda_2 \cdot f_2$$

Iloraz częstotliwości możemy wyrazić przez iloraz długości fal:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Mamy zatem:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{v_d + v_{źr}}{v_d - v_{źr}}$$

Wyznaczmy z powyższego równania prędkość źródła:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot (v_d - v_{źr}) = (v_d + v_{źr})$$

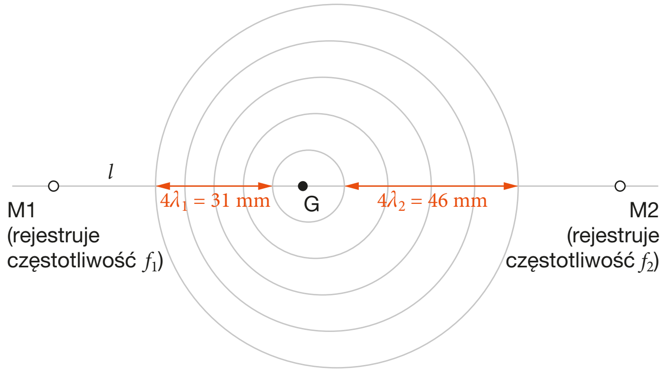
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_d - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_{źr} = v_d + v_{źr}$$

$$v_{źr} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 1\right) = v_d \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)$$

$$v_{źr} = \frac{v_d \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1\right)}{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 1\right)}$$

Zmierzmy odcinki po prawej i lewej stronie głośnika G widoczne na rysunku 1. na s. 383. Wyniki pomiarów zapisano na schematycznym rysunku na s. 385.

Uwaga. Mierzymy wielokrotność (np. czterokrotność) długości fali, aby zwiększyć w ten sposób dokładność wyniku pomiarów.




$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{4\lambda_2}{4\lambda_1}=\frac{46\,\text{mm}}{31\,\text{mm}}=1{,}48\approx 1{,}5$$

$$v_{źr}=\frac{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot(1{,}48-1)}{(1{,}48+1)}=66\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Odpowiedź:** Prędkość głośnika wynosi 66 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**Punktacja:**

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości głośnika oraz prawidłowy wynik liczbowy z jednostką $v_{źr}=66\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

3 pkt – poprawna metoda wyprowadzenia oraz zapisanie związku $\frac{v_d+v_{źr}}{v_d-v_{źr}}\approx 1{,}5$ (lub w postaci równoważnej z prawidłowo zidentyfikowanymi prędkościami), tzn. wykorzystanie wzorów Dopplera z poprawnie zidentyfikowanymi częstotliwościami oraz zastosowanie związku falowego oraz obliczenie ilorazu częstotliwości odbieranych przez mikrofony na podstawie obrazu powierzchni falowych,

2 pkt – obliczenie ilorazu częstotliwości odbieranych przez mikrofony na podstawie obrazu powierzchni falowych i związku falowego: $\frac{f_1}{f_2}\approx 1{,}5$

LUB

– poprawne wyprowadzenie wzoru $\frac{f_1}{f_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\frac{v_d+v_{źr}}{v_d-v_{źr}}$ (lub równoważnego), tzn. wykorzystanie wzorów Dopplera z poprawnie zidentyfikowanymi częstotliwościami oraz zastosowanie związku falowego,

1 pkt – zapisanie wzorów Dopplera z poprawnym zidentyfikowaniem $f_1$ oraz $f_2$

LUB

– wyprowadzenie lub zapisanie związku $\frac{f_1}{f_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ (lub równoważnego),

LUB

– obliczenie ilorazu długości fal na podstawie obrazu powierzchni falowych: $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\approx 1{,}5$,

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, lub brak rozwiązania.

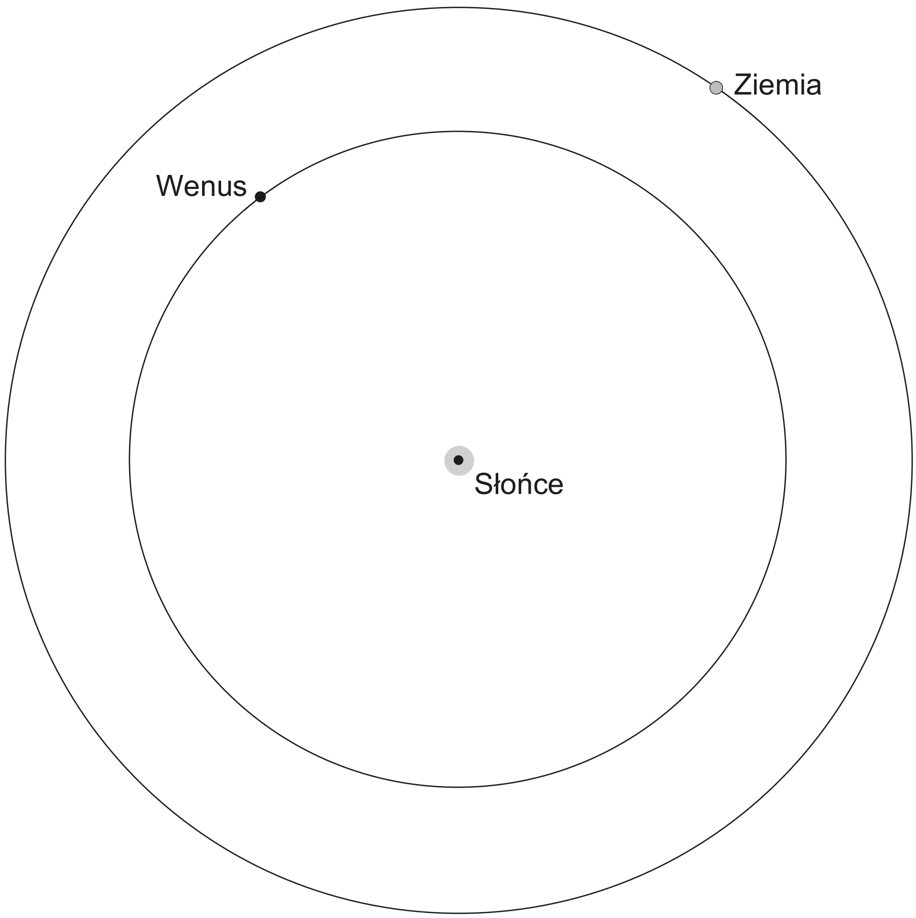
## Przykład 3.

### Zadanie 5. Wenus i Ziemia

CKE MARZEC 2021

Wenus i Ziemia obiegają Słońce po orbitach, które z dobrym przybliżeniem możemy uznać za kołowe. Na poniższym rysunku przedstawiono położenie względne orbit obu planet z zachowaniem skali pomiędzy rozmiarami tych orbit. Przyjmij do obliczeń, że okres obiegu Ziemi dookoła Słońca wynosi $T_Z$ = 1 rok, a każda z planet oddziałuje tylko ze Słońcem.

*Niektóre dane liczbowe są zawarte w proporcjach geometrycznych na rysunku. W celu rozwiązania zadań 5.1.–5.3. wykonaj odpowiednie pomiary linijką – z dokładnością do 1 mm.*



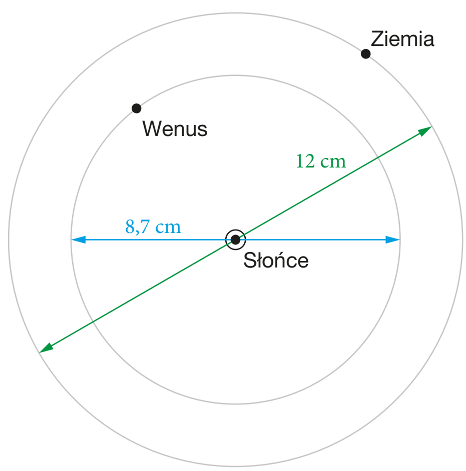

**Zadanie 5.1 (0–2)** CKE MARZEC 2021

**Oblicz okres obiegu Wenus dookoła Słońca. Wynik podaj w latach ziemskich w zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących.**

## PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

Symbol linijki przy treści zadania wskazuje, że musimy wykonać odpowiednie pomiary na rysunku. Zaznaczone średnice okręgów wynoszą 8,7 cm oraz 12 cm, co zapisano na schemacie obok.

Zakładamy, że rysunek przy treści zadania zachowuje proporcje, więc stosunek średnic okręgów na rysunku będzie równy stosunkowi promieni tych orbit (przy uproszczonym założeniu, że orbity Wenus i Ziemi są kołowe).




$$\frac{r_W}{r_Z} = \frac{8{,}7\ \text{cm}}{12\ \text{cm}} = 0{,}725$$

gdzie: $r_W$ – promień orbity Wenus, $r_Z$ – promień orbity Ziemi.

Zależność, jaka łączy okresy obiegów dwóch planet z ich średnimi odległościami od Słońca, to III prawo Keplera.

Oznaczamy: $T_Z$ – okres obiegu Ziemi dookoła Słońca, $T_W$ – okres obiegu Wenus dookoła Słońca.

CKE

Znajdziesz to
w Karcie wzorów
s. 16 z 20

Zapisujemy III prawo Keplera:

$$\frac{T_Z^2}{r_Z^3} = \frac{T_W^2}{r_W^3}$$

Przekształcamy równanie i wyznaczamy $T_W$:

$$T_W^2 = \left(\frac{r_W}{r_Z}\right)^3 \cdot T_Z^2$$

$$T_W = \sqrt{\left(\frac{r_W}{r_Z}\right)^3} \cdot T_Z$$

Podstawiamy dane z zadania oraz dane uzyskane z pomiarów na rysunku, a otrzymany wynik zaokrąglamy do dwóch cyfr znaczących:

$$T_W = \sqrt{(0{,}725)^3} \cdot 1\,\text{rok} \approx 0{,}62\,\text{roku}$$

**Odpowiedź:** Okres obiegu Wenus wokół Słońca to ok. 0,62 roku.

**Punktacja:**

2 pkt – poprawna metoda wyznaczenia okresu orbitalnego Wenus i prawidłowy wynik liczbowy podany w latach ziemskich,

1 pkt – zapisanie III prawa Keplera oraz wykonanie prawidłowych pomiarów linijką, pozwalających na określenie stosunku promieni orbity Wenus i Ziemi (lub odwrotnie),

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, lub brak rozwiązania.

## Zadanie 5.2 (0–2) CKE MARZEC 2021

Wartość prędkości liniowej Ziemi w ruchu orbitalnym względem Słońca wynosi ok. 30 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

**Oblicz wartość prędkości liniowej Wenus w ruchu orbitalnym względem Słońca.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

W tym zadaniu zastosujemy wzór na prędkość orbitalną z karty wzorów (prędkość, z jaką porusza się dane ciało po orbicie kołowej w centralnym polu grawitacyjnym):

CKE

Znajdziesz to
w Karcie wzorów
s. 16 z 20

$$v_{or} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

W naszym przypadku $M$ to masa Słońca, wokół którego poruszają się Ziemia oraz Wenus, natomiast $r$ – promień orbity dla danej planety.

Stosujemy oznaczenia takie same jak w punkcie 5.1 i otrzymujemy:

$$\frac{v_{orW}}{v_{orZ}} = \frac{\sqrt{\frac{GM_S}{r_W}}}{\sqrt{\frac{GM_S}{r_Z}}}$$

Zatem:

$$\frac{v_{orW}}{v_{orZ}} = \sqrt{\frac{GM_S}{r_W}} \cdot \sqrt{\frac{r_Z}{GM_S}}$$

$$\frac{v_{orW}}{v_{orZ}} = \sqrt{\frac{r_Z}{r_W}} \Rightarrow v_{orW} = v_{orZ} \cdot \sqrt{\frac{r_Z}{r_W}}$$

Z punktu 5.1 wiemy, że $\frac{r_Z}{r_W} = \frac{12\,\text{cm}}{8{,}7\,\text{cm}}$. Podstawiamy tę zależność do wyprowadzonego powyżej wzoru i otrzymujemy:

$$v_{orW} = 30\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{12}{8{,}7}} \approx 35\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$$

**Odpowiedź:** Prędkość liniowa Wenus w ruchu orbitalnym względem Słońca to ok. 35 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

**Punktacja:**

2 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości Wenus i prawidłowy wynik liczbowy wraz z jednostką,

1 pkt – zapisanie siły grawitacji jako siły dośrodkowej (albo wykorzystanie wzoru na prędkość orbitalną) oraz wykorzystanie prawidłowych pomiarów linijką, pozwalających na określenie stosunku promieni orbity Wenus i Ziemi,

LUB

– wyprowadzenie zależności $\frac{v_{orW}}{v_{orZ}} = \sqrt{\frac{r_Z}{r_W}}$,

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, lub brak rozwiązania.

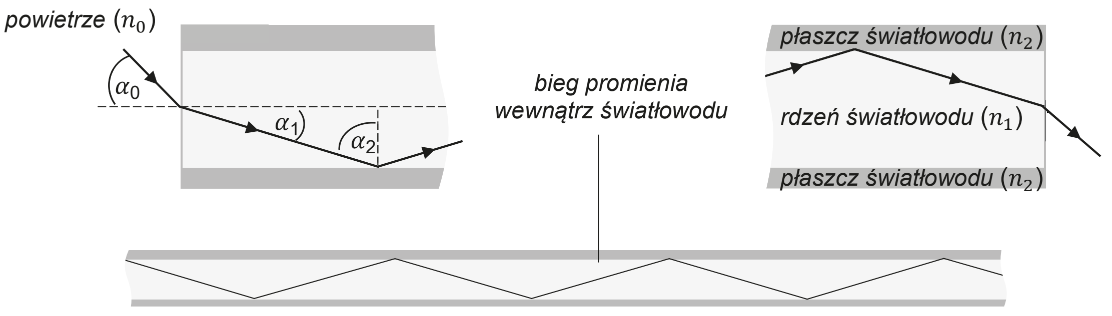
## Przykład 4.

### Zadanie 12. Światłowód

CKE MARZEC 2021

Do przesyłania informacji za pomocą światła stosuje się światłowody. W klasycznym światłowodzie wyróżniamy dwa obszary – centralnie położony rdzeń wykonany ze szkła o współczynniku załamania światła $n_1$ oraz otaczający go płaszcz o współczynniku załamania światła $n_2$. Powierzchnia czołowa rdzenia światłowodu stanowi granicę dwóch ośrodków – powietrza o współczynniku załamania $n_0 = 1$ i szkła, z którego wykonano rdzeń. Dzięki odpowiednio dobranym współczynnikom $n_1$ oraz $n_2$ możliwe jest wprowadzenie wiązki światła do rdzenia światłowodu i przez wielokrotne odbicie tej wiązki w rdzeniu przesłanie informacji na duże odległości, wzdłuż toru o dowolnym kształcie, bez wyraźnych strat i zakłóceń.

Na poniższym rysunku przedstawiono bieg promienia padającego na czoło światłowodu pod kątem $\alpha_0$ (lewa część rysunku), bieg promienia przez światłowód (dolna część rysunku) oraz bieg promienia opuszczającego światłowód (prawa część rysunku).




W pewnym światłowodzie kąt graniczny (dla przejścia rdzeń–płaszcz) jest równy $\alpha_{gr} = 58°$ natomiast odpowiednie kąty oznaczone na rysunku wynoszą: $\alpha_0 = 65°$ oraz $\alpha_2 = 60°$.

## Zadanie 12.1 (0–3) CKE MARZEC 2021

**Oblicz bezwzględny współczynnik załamania $n_2$ światła w materiale, z którego wykonano <u>płaszcz</u> światłowodu opisanego w zadaniu 12.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

W zadaniu skorzystamy z prawa załamania. Przyjmujemy oznaczenia takie jak w treści zadania. Z rysunku wynika, że:

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1}=\frac{n_1}{n_0}$$

Wyznaczamy z tej zależności współczynnik $n_1$ załamania rdzenia światłowodu:

$$n_1=n_0\cdot\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1} \qquad (1)$$

Stosujemy ponownie prawo załamania dla szczególnego przypadku, kiedy kąt padania jest kątem granicznym. Wtedy zgodnie z definicją kąta granicznego kąt załamania jest równy 90°.

Prawo załamania przy przejściu z ośrodka 1 do 2 (patrz rys.) przyjmie wtedy postać:

$$\frac{\sin\alpha_{gr}}{\sin 90^\circ}=\frac{n_2}{n_1}$$

Wiemy, że $\sin 90^\circ = 1$. Wyznaczamy współczynnik $n_2$ załamania płaszcza światłowodu:

$$n_2=n_1\cdot\sin\alpha_{gr}$$

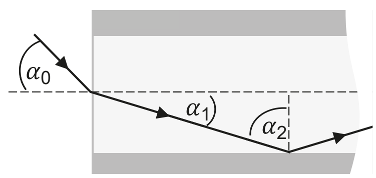
Podstawiamy do powyższego równania współczynnik $n_1$, wyznaczony w równaniu (1):

$$n_2=n_0\cdot\frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha_1}\cdot\sin\alpha_{gr}$$

Współczynnik załamania powietrza $n_0 = 1$, zatem powyższy wzór przyjmie postać:

$$n_2=\frac{\sin\alpha_0\cdot\sin\alpha_{gr}}{\sin\alpha_1} \qquad (2)$$

Zauważamy, że z rysunku w treści zadania (fragment tego rysunku zamieszczono obok) wynika zależność:




$$\alpha_1=90^\circ-\alpha_2$$

Skoro $\alpha_2 = 60^\circ$, zatem: $\alpha_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Podstawiamy dane do wzoru (2):

$$n_2=\frac{\sin 65^\circ\cdot\sin 58^\circ}{\sin 30^\circ}$$

Do obliczeń stosujemy kalkulator naukowy (z funkcją obliczania wartości funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta), o czym informuje nas ikonka kalkulatora przy numerze zadania.

$$n_2=\frac{\sin 65^\circ\cdot\sin 58^\circ}{\sin 30^\circ}\approx\frac{0{,}9063\cdot 0{,}848}{0{,}5}\approx 1{,}54$$

**Odpowiedź:** Współczynnik załamania materiału, z którego jest wykonany płaszcz światłowodu, wynosi 1,54.

CKE

**Znajdziesz to w Karcie wzorów**
s. 17 z 20

**Punktacja:**

3 pkt – poprawna metoda obliczenia oraz prawidłowa wartość współczynnika załamania $n_2$,
2 pkt – poprawne zapisanie związków między $n_1$ a $n_2$ oraz między $n_1$ a $n_0$, wraz z prawidłową identyfikacją kątów,
1 pkt – poprawne zapisanie związków między $n_1$ a $n_2$ (warunku na kąt graniczny), wraz z prawidłową identyfikacją kątów
LUB
– prawidłowe wyznaczenie współczynnika $n_1$,
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, lub brak rozwiązania.

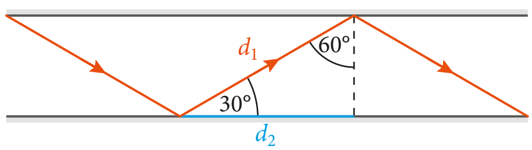
## Zadanie 12.2 (0–3) CKE MARZEC 2021

Foton biegnący w światłowodzie przebywa dłuższą drogę niż wynosi długość światłowodu. Prędkość światła w rdzeniu światłowodu oraz prędkość przenoszenia sygnału przez światłowód się różnią. Przyjmij, że rdzeń światłowodu wykonano z materiału, dla którego współczynnik załamania światła wynosi $n_1 = 1{,}8$, a kąt, pod jakim odbija się promień światła w rdzeniu od płaszcza światłowodu, wynosi $\alpha_2 = 60°$ (jak na rysunku w treści zadania).

**Oblicz czas *t*, w jakim zostanie przekazany sygnał wzdłuż tego światłowodu o długości *s* = 100 km. Wynik podaj w zaokrągleniu do dwóch cyfr znaczących.**

### PRZYKŁADOWE ROZWIĄZANIE Z KOMENTARZEM

Sporządzamy schematyczny rysunek:




gdzie: $d_1$ – odległość, jaką przebywa promień światła wewnątrz światłowodu pomiędzy kolejnymi odbiciami, $d_2$ – odległość, na jaką przemieszcza się sygnał w światłowodzie pomiędzy kolejnymi odbiciami.

W czasie, w jakim światło pokonało odległość $d_1$, sygnał przemieścił się wzdłuż światłowodu o odległość $d_2$. Zależność między tymi wielkościami można zapisać za pomocą funkcji trygonometrycznych:

$$\frac{d_2}{d_1} = \cos 30°$$

Długość światłowodu to odległość, na jaką wzdłuż światłowodu został przesłany sygnał.

Załóżmy, że na długości całego światłowodu światło odbije się $N$ razy. Wobec tego długość światłowodu jest równa:

$$s = N \cdot d_2 \qquad (1)$$

Podobnie droga, jaką przebywa światło, poruszając się zygzakiem wewnątrz światłowodu, jest równa:

$$s_{\text{światła}} = N \cdot d_1 \qquad (2)$$

Po porównaniu (1) i (2) otrzymamy:

$$\frac{s_{\text{światła}}}{s} = \frac{N \cdot d_1}{N \cdot d_2} = \frac{1}{\frac{d_2}{d_1}} = \frac{1}{\cos 30°}$$

Droga, jaką przebywa światło wewnątrz światłowodu, jest więc równa:

$$s_{\text{światła}} = \frac{s}{\cos 30°}$$

Światło porusza się wewnątrz światłowodu z prędkością mniejszą niż w próżni. Z definicji współczynnika załamania mamy:

$$n_1 = \frac{c}{v_1}$$

gdzie: $c$ – prędkość światła w próżni, $v_1$ – prędkość światła w światłowodzie.

Zatem prędkość światła w światłowodzie jest równa:

$$v_1 = \frac{c}{n_1}$$

Czas, w jakim sygnał pokonuje odległość $s$, a światło – odległość $s_{\text{światła}}$, jest równy:

$$t = \frac{s_{\text{światła}}}{v_1} = \frac{\frac{s}{\cos 30°}}{\frac{c}{n_1}} = \frac{s \cdot n_1}{c \cdot \cos 30°}$$

Podstawiamy dane i otrzymujemy:

$$t = \frac{1 \cdot 10^5\ \text{m} \cdot 1{,}8}{3 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}69\ \text{ms}$$

**Odpowiedź:** Czas, w jakim sygnał przebędzie odległość 100 km wzdłuż światłowodu, to ok. 0,69 ms.

Zauważ, że w karcie wzorów CKE nie ma definicji współczynnika załamania. Aby móc bez problemów rozwiązywać zadania z optyki, musisz znać tę definicję.

Dla powietrza przyjmujemy najczęściej przybliżoną wartość współczynnika załamania $n = 1$ oraz prędkość rozchodzenia się światła równą $c$ (chyba, że w treści zadania podano inaczej).

**Punktacja:**

3 pkt – poprawna metoda oszacowania $t$ oraz prawidłowy wynik liczbowy wraz z jednostką,

2 pkt – poprawna metoda obliczenia prędkości, z jaką przemieszcza się sygnał wzdłuż światłowodu, oraz zapisanie związku między czasem a prędkością sygnału i długością światłowodu

LUB

– poprawna metoda obliczenia drogi, jaką przebywa światło wewnątrz światłowodu, i prędkości, z jaką się przemieszcza, oraz zapisanie związku między czasem, przebytą drogą i prędkością światła,

1 pkt – zapisanie związku między czasem, prędkością sygnału a długością światłowodu oraz zapisanie związku trygonometrycznego między prędkością światła w światłowodzie a prędkością sygnału i kątem odbicia

LUB

– poprawna metoda wyznaczenia $v_1$, w tym zapisanie związku trygonometrycznego między prędkością światła w światłowodzie a prędkością sygnału i kątem odbicia oraz zapisanie zależności definiującej współczynnik $n_1$,

LUB

– poprawna metoda wyznaczenia drogi, jaką światło przebywa wewnątrz światłowodu, oraz zapisanie zależności definiującej współczynnik $n_1$,

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę, lub brak rozwiązania.

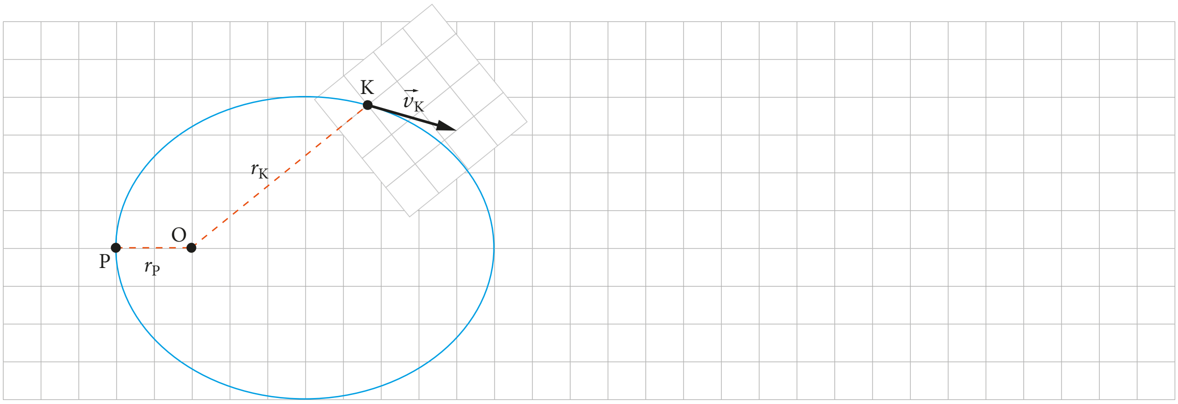
## Zadania do samodzielnego rozwiązania

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: FWYAV8**
**Rozwiązania zadań 1.–6.**

**Przykład 1.**, patrz s. 381

### Zadanie 1. (0–3)

Satelitę znajdującego się na niskiej orbicie wokół Ziemi w odległości $6800\ \mathrm{km}$ od jej środka należy przenieść na orbitę o 4-krotnie większym promieniu. W tym celu zmieniono początkową orbitę tego satelity z kołowej na eliptyczną. Elipsa, po której zaczął poruszać się satelita, ma jedno z ognisk w środku Ziemi. Odległość ogniska od perygeum jest równa $6800\ \mathrm{km}$, natomiast odległość ogniska od apogeum jest równa 27 200 km. Na rysunku został zaznaczony wektor prędkości satelity w pewnym punkcie K na elipsie, gdy satelita znajdował się w odległości $r_{\mathrm{K}} = 20\,400\ \mathrm{km}$ od środka Ziemi, a więc od ogniska elipsy. **Na podstawie rysunku oraz odpowiednich praw fizyki narysuj wektor prędkości satelity w punkcie P – perygeum.** Środek Ziemi (ognisko elipsy) zaznaczono literą O.

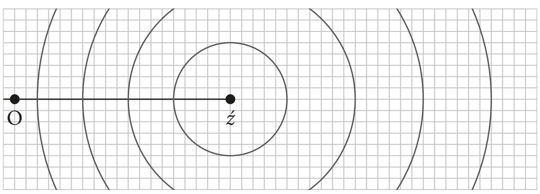



**Przykład 2.**, patrz s. 383

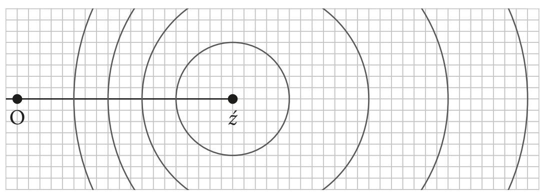
### Zadanie 2. (0–4)

Na poniższych rysunkach przedstawiono schematycznie źródło dźwięku Ź oraz obserwatora O. Źródło dźwięku porusza się wzdłuż prostej OŹ z prędkością o stałej wartości. Prędkość ta jest inna w przypadku rysunku a) oraz b). Na rysunkach zaznaczono również fragmenty chwilowego obrazu powierzchni falowych. Prędkość dźwięku wynosi $340\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, natomiast źródło dźwięku na rysunku a) porusza się z prędkością o wartości $68\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. **Wykonaj odpowiednie pomiary linijką oraz skorzystaj z odpowiednich praw oraz zależności fizycznych i oblicz, z jaką prędkością porusza się źródło dźwięku w przypadku b).**

**a)**




**b)**




**Przykład 3.**, patrz s. 385

### Zadanie 3.

W ramach zajęć kółka fizycznego grupa uczniów wykonała plakat ilustrujący orbity kołowe niektórych satelitów poruszających się wokół Ziemi. W skali przyjętej przez uczniów średnica okręgu ilustrującego orbitę dla satelity meteorologicznego Jason-3 ma średnicę 7,7 cm. Sprawdzili, że jego okres obiegu to 112 minut. Największa orbita została narysowana dla satelity geostacjonarnego. Uczniowie wiedzą, że jego okres obiegu wokół Ziemi to 24 godziny.

## Zadanie 3.1 (0–2)

**Oblicz średnicę okręgu ilustrującego orbitę satelity geostacjonarnego na tym plakacie. Wynik podaj z dokładnością do milimetrów.**

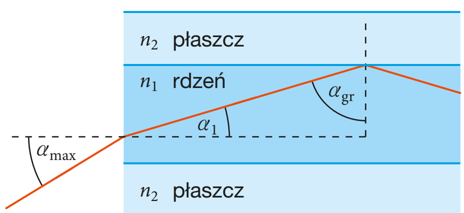
## Zadanie 3.2 (0–2)

Satelita Jason-3 porusza się po orbicie kołowej o promieniu ok. $7700\ \mathrm{km}$ z prędkością ok. $7{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. **Oblicz, z jaką prędkością poruszałby się ten satelita, gdyby krążył po orbicie kołowej o takim samym promieniu, ale wokół Księżyca. Wynik podaj z dokładnością do dwóch cyfr znaczących.** Przyjmij, że masa Ziemi jest 81 razy większa od masy Księżyca.

## Zadanie 4.

Przykład 4., patrz s. 388

W światłowodach do przesyłania informacji stosuje się zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia. Aby wewnątrz światłowodu promień światła padał pod kątem większym niż kąt graniczny $\alpha_{gr}$ i zachodziło całkowite wewnętrzne odbicie, wiązka światła wpadająca do wnętrza światłowodu musi być skierowana pod odpowiednim kątem. Jego maksymalna wartość to kąt akceptacji (oznaczmy go jako $\alpha_{max}$). Ilustruje to poniższy rysunek.




Obejrzyj film

app.nowaterazmatura.pl
**Kod: FCX986**
Tutorial: **Rozwiązanie zadania 4.**

Dla pewnego światłowodu znajdującego się w powietrzu, gdzie możemy przyjąć współczynnik załamania równy 1, kąt akceptacji $\alpha_{max} = 56°$. Współczynnik załamania materiału, z którego jest wykonany płaszcz, wynosi $n_2 = 1{,}54$.

### Zadanie 4.1 (0–3)

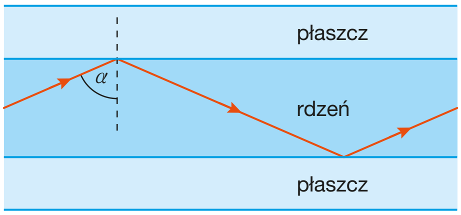
**Wyznacz współczynnik $n_1$ załamania materiału, z którego wykonano rdzeń tego światłowodu.**

*Wskazówka. W rozwiązaniu możesz wykorzystać następujące zależności pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi kąta $\alpha$:*

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{oraz} \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

### Zadanie 4.2 (0–3)

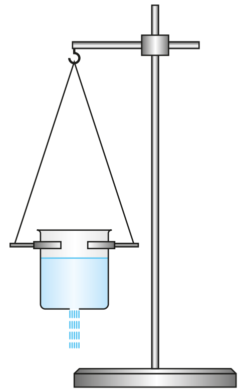
Promień światła rozchodzi się w światłowodzie o długości 50 km w sposób pokazany na rysunku.




Czas przebycia sygnału w tym światłowodzie to 0,31 ms. **Wyznacz współczynnik załamania materiału, z którego jest wykonany rdzeń tego światłowodu, jeżeli $\alpha$ = 64°.**

## Zadanie 5.

Na statywie umieszczono naczynie z wodą (jak na rysunku). W dnie naczynia wycięto otwór o polu przekroju $S$ równym $0{,}2\ \mathrm{cm}^2$, przez który woda może swobodnie wypływać. Początkowa wysokość słupa wody $h$ jest równa $20\ \mathrm{cm}$. Gęstość wody $d$ wynosi $1000\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.



## Zadanie 5.1 (0–2)

**Udowodnij, że prędkość strumienia cieczy wypływającego z otworu wynosi ok. 2 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Skorzystaj z zasady zachowania energii.**

## Zadanie 5.2 (0–2)

**Udowodnij, że siła, jaką woda z naczynia działa na wodę w wypływającym strumieniu i odwrotnie, jest opisana zależnością: $F = 2dghS$.**

## Zadanie 5.3 (0–2)

Na jednym ramieniu dźwigni dwustronnej zamocowano naczynie z wodą, a na drugim – takie samo naczynie z rtęcią, która ma taką objętość, aby układ był w równowadze. Gęstość rtęci wynosi $13\,600\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Przyjmij, że ramiona dźwigni są jednakowe. **Porównaj wielkości charakteryzujące obie ciecze. Wstaw w odpowiednie pola tabeli jeden ze znaków: >, =, <.**

| | | Woda | Znak | Rtęć |
|---|---|---|---|---|
| **A.** | Wysokość słupa cieczy | $h_1$ | | $h_2$ |
| **B.** | Ciśnienie hydrostatyczne | $p_1$ | | $p_2$ |
| **C.** | Siła parcia na dno | $F_1$ | | $F_2$ |
| **D.** | Siła wyporu działająca na to samo ciało całkowicie zanurzone w cieczy | $F_{w1}$ | | $F_{w2}$ |

## Zadanie 6. (0–2)

Zwierciadło płaskie zamocowano pod kątem 85° względem poziomu i skierowano na nie wiązkę światła równoległą do poziomu. **Wybierz poprawne uzupełnienie zdania A–C i jego dokończenie 1–3.**

Kąt między promieniem padającym a promieniem odbitym wynosi **A**/ **B**/ **C**, ponieważ **1**/ **2**/ **3**.

**A.** 0°
**B.** 5°
**C.** 10°

**1.** kąt padania jest równy 0°
**2.** kąt padania jest równy 5°
**3.** kąt padania jest równy 10°

# 1. Odpowiedzi do zadań do samodzielnego rozwiązania

## Najważniejsze wiadomości i zadania maturalne

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: ZMD7DT**
**Rozwiązanie zadania 1. Wstęp**

### Wstęp o niepewnościach pomiarowych

**Zadanie 1.1, s. 34:** $a \approx 1{,}2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ $\quad b \approx -140\ \mathrm{g}$

**Zadanie 1.2, s. 35:**

$$\Delta a = \frac{\left|1{,}4\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} - 1{,}0\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right|}{2} = 0{,}2\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3};$$

$$\Delta b = \frac{|-180\ \mathrm{g} - (-90\ \mathrm{g})|}{2} \approx 50\ \mathrm{g}$$

**Zadanie 1.3, s. 35:** $d = (1{,}2 \pm 0{,}2)\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$,
$m_0 = (120 \pm 50)\ \mathrm{g}$

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: RF6RAF**
**Rozwiązania zadań 1.–3. dział 1.**

### 1. Kinematyka

**Zadanie 1.1, s. 55:** $t = \frac{2s_1}{v_{01}} = 36\ \mathrm{s}$

**Zadanie 1.2, s. 55:** $s_2 = \frac{s_1 \cdot (v_{02}^2 - v^2)}{v_{01}^2} = 393\ \mathrm{m}$

**Zadanie 2, s. 56:** A

**Zadanie 3.1, s. 56:** $\frac{v_{\mathrm{A0}}}{v_{\mathrm{B0}}} = \frac{\frac{3d}{t_{\mathrm{A}}}}{\frac{d}{t_{\mathrm{B}}}} = 6$

Ciało A wyrzucono z 6-krotnie większą prędkością niż ciało B.

**Zadanie 3.2, s. 56:** $v_{\mathrm{Bk}} = \sqrt{v_{\mathrm{B0}}^2 + (gt)^2} = 7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,
gdzie $v_{\mathrm{B0}}$ – prędkość początkowa kulki.

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: 9CLVN3**
**Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 2.**

### 2. Dynamika

**Zadanie 1.1, s. 72:** B

**Zadanie 1.2, s. 72:** $F = 48\ \mathrm{N}$, kierunek i zwrot wektora siły jest taki sam jak kierunek i zwrot wektora zmiany prędkości.

**Zadanie 2, s. 73:** 1P, 2F, 3P

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: 5EUQKE**
**Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 3.**

### 3. Praca, moc, energia

**Zadanie 1.1, s. 85:**

$$\Delta E = \frac{(E_1 - E_2)}{E_1} \cdot 100\% = \frac{(h_1 - h_2)}{h_1} \cdot 100\%$$

$$\Delta E_{\max} = 47\%,\ \Delta E_{\min} = 42\%$$

**Zadanie 1.2, s. 85:** $v = 6{,}65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

**Zadanie 1.3, s. 85:** $\frac{F_{\mathrm{R}}}{F_{\mathrm{g}}} = \frac{1{,}7 \cdot \sqrt{2gh_1}}{tg} = 62$

**Zadanie 2, s. 86:** B, C

### 4. Bryła sztywna

**Zadanie 1.1, s. 103:** Układ pozostanie w równowadze, ponieważ $T_{\max} > N$, gdzie $T_{\max}$ – maksymalna wartość siły tarcia statycznego, $N$ – siła naprężenia sznurka łączącego bloczek z ciężarkiem leżącym na stole.

**Zadanie 1.2, s. 104:**

$$I = R_1 \cdot \frac{g \cdot (m_2 \cdot R_2 - m_1 \cdot R_1)}{a_1} - R_1^2 \cdot m_1 - R_2^2 \cdot m_2$$

$$I = 0{,}0023\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$$

**Zadanie 2, s. 104:** D

**Kod: FETMTT**
app.nowaterazmatura.pl
**Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 4.**

### 5. Ruch drgający

**Zadanie 1.1, s. 119:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2{,}2\ \mathrm{s}$,

$$v = \frac{s}{t} = \frac{s}{2{,}5T} = 20\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}},\ d \approx 2 \cdot A \approx \frac{v_{\max} \cdot T}{\pi} \approx 42\ \mathrm{cm}$$

**Zadanie 1.2, s. 120:** A1

**Zadanie 2, s. 120:** B, G

**Kod: UZLBRF**
app.nowaterazmatura.pl
**Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 5.**

### 6. Fale mechaniczne

**Zadanie 1.1, s. 140:** 1P, 2P, 3F

**Zadanie 1.2, s. 141:** $v_2 = v_1 \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 13{,}6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

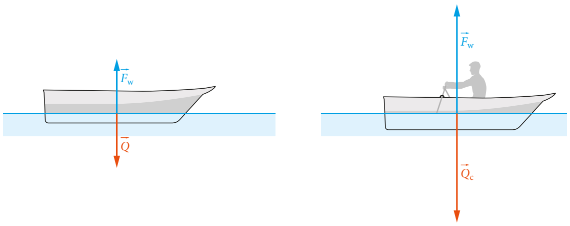
**Zadanie 1.3, s. 142:** Korzystamy z definicji sinusa kąta, twierdzenia Pitagorasa oraz prawa załamania.

**Zadanie 2, s. 142:** B, A

**Kod: AHR4KB**
app.nowaterazmatura.pl
**Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 6.**

## 7. Hydrostatyka

**Zadanie 1.1, s. 154:**




**Zadanie 1.2, s. 154:** Maksymalna dopuszczalna masa pojemnika $m_{p\ max} = 1{,}75m - m_ł = 60$ kg, gdzie $m$ – masa wędkarza, $m_ł$ – masa łódki.

**Zadanie 2, s. 154:** D

Kod: 4C343U
app.nowaterazmatura.pl
Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 7.

## 8. Termodynamika

**Zadanie 1, s. 176:** W przemianie I bezwzględna wartość ciepła **oddanego do otoczenia** jest **większa niż** ilość ciepła **oddanego do otoczenia** w przemianie II.

**Zadanie 2, s. 177:** $\eta = \frac{Q_{odd}}{W_{całk}} = 6{,}5$

**Zadanie 3, s. 178:** 1C, 2C

Kod: H6VNQ9
app.nowaterazmatura.pl
Rozwiązania zadań 1.–3. dział 8.

## 9. Grawitacja z elementami astronomii

**Zadanie 1.1, s. 202:** $\frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P} = \frac{1+e}{1-e} \approx 59{,}8$

**Zadanie 1.2, s. 202:** $a = \frac{GM}{v_P^2} \cdot \frac{v_P}{v_A} \approx 17{,}7$ au

**Zadanie 1.3, s. 203: Okres obiegu komety:**

$$T_H = T_Z \cdot \sqrt{\left(\frac{a_H}{a_Z}\right)^3} \approx 75{,}1 \text{ roku.}$$

Kolejne przejście komety w najbliższej odległości od Słońca nastąpi w: 1986 + 75 = 2061 roku.

**Zadanie 2, s. 203: a)** A, **b)** C

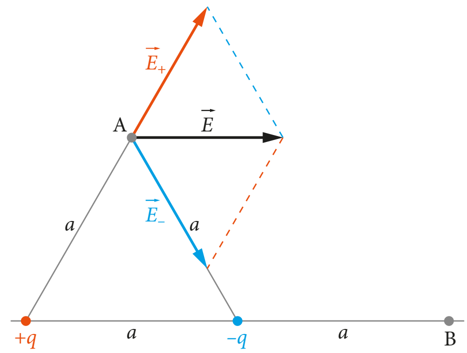
**Zadanie 3.1, s. 204:** Galaktyki A i B oddalają się od siebie z prędkością 400 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Kod: BTBX5F
app.nowaterazmatura.pl
Rozwiązania zadań 1.–3. dział 9.

## 10. Pole elektryczne

**Zadanie 1.1, s. 232:**

**a)**




**b)** A

**Zadanie 1.2, s. 232:**

$$E = E_- - E_+ = \frac{kq}{a^2} - \frac{kq}{4a^2} = 3\,\frac{\text{N}}{\text{C}}$$

**Zadanie 1.3, s. 233: a)** 1P, 2F, 3P; **b)** E

**Zadanie 2, s. 234:** D

**Zadanie 3.1, s. 234:** B

**Zadanie 3.3, s. 235:** $v = 3q\sqrt{\frac{k}{mR}}$

**Zadanie 3.4, s. 236:** 1P, 2P

**Zadanie 4.1, s. 236:** 1. =, 2. =, 3. <

**Zadanie 4.2, s. 236:** 60 V

**Zadanie 5.2, s. 238:** $E_B = \frac{k \cdot 0{,}5Q}{64R^2} = \frac{kQ}{128R^2}$

**Zadanie 5.3, s. 238:** 1F, 2P, 3F

**Zadanie 6.2, s. 239:** A4

app.nowa
terazmatura.pl
Kod: M2PRPC
Rozwiązania zadań 1.–6. dział 10.

## 11. Prąd stały

**Zadanie 1.1, s. 256:** C, D

**Zadanie 1.2, s. 256:** Wyznaczamy natężenia prądów w górnej i dolnej krawędzi, różnicę potencjałów między punktami A i B oraz korzystamy z definicji oporu elektrycznego.

**Zadanie 1.3, s. 257:** Korzystamy z faktu, że prąd nie będzie płynąć pomiędzy punktami A i B, jeśli $U_{AB} = 0$, i stosujemy odpowiednie przekształcenia.

**Zadanie 1.4, s. 257:** $R_2 = 2R_1 = 2 \cdot \frac{\left(\frac{U}{3}\right)^2}{P_1} = 20\ \Omega$

**Zadanie 2, s. 258:** 1P, 2P, 3P

app.nowa
terazmatura.pl
Kod: SH11WG
Rozwiązania zadań 1. i 2. dział 11.

## 12. Pole magnetyczne

**Zadanie 2.1, s. 274:** $B = \frac{B_d \cdot \sqrt{L^2 + 4 \cdot R^2}}{L} \approx 1{,}51$ mT

app.nowa
terazmatura.pl
Kod: QNYETV
Rozwiązania zadań 1.–3. dział 12.

**Zadanie 2.2, s. 275:** Dla zwojnicy o promieniu 1 cm, ponieważ iloraz jej długości do promienia jest większy.

**Zadanie 2.3, s. 275:** $\Delta I = I \cdot \frac{\Delta B}{B} = 0{,}6\ \mathrm{A}$

**Zadanie 2.4, s. 275:** C

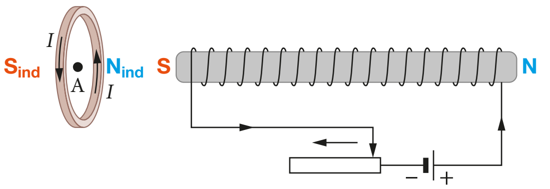
**Zadanie 3, s. 276:** A, F

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: RU2AGM**
**Rozwiązania zadań 1.–3. dział 13.**

## 13. Indukcja elektromagnetyczna i prąd przemienny

**Zadanie 1.1, s. 295:** 1P, 2F, 3P, 4F

**Zadanie 1.2, s. 295:**




**Zadanie 1.3, s. 296:** Diagram 1: wektor $\vec{B}_1$ zwrócony w prawo. Diagram 2: wektor $\vec{B}_2$ zwrócony w prawo, krótszy od $\vec{B}_1$. Diagram 3: dwa wektory o początku w punkcie A – wektor $\Delta\vec{B}_{12}$ o długości $\vec{B}_1 - \vec{B}_2$, zwrócony w lewo, wektor $\vec{B}_{\mathrm{ind}}$ o długości mniejszej od $\Delta\vec{B}_{12}$, zwrócony w prawo.

**Zadanie 2, s. 296:** A, D

**Zadanie 3.1, s. 297:** 1F, 2P, 3F

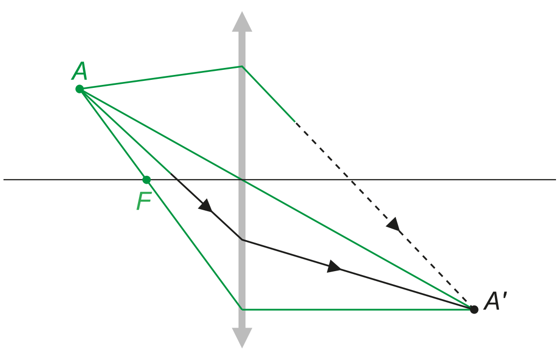
**Zadanie 3.2, s. 297:** D

**Zadanie 3.3, s. 298:** 0,6 A

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: LWF94Z**
**Rozwiązania zadań 1.–3. dział 14.**

## 14. Fale elektromagnetyczne, optyka

**Zadanie 1, s. 325:**




**Zadanie 2, s. 325:** D

**Zadanie 3.1, s. 326:** 1P, 2P, 3F

**Zadanie 3.2, s. 326:** ≈ –5,6 D

## 15. Fizyka atomowa

**Zadanie 1.1, s. 348:** $W = \frac{hc}{\lambda} - U_{\mathrm{h}} \cdot e = 2{,}3\ \mathrm{eV}$

**Zadanie 1.2, s. 349:** Przy braku napięcia elektrony kierują się losowo we wszystkie możliwe strony. Część z nich dociera do anody. Oznacza to, że pomiędzy anodą i katodą przemieszcza się pewien ładunek elektryczny, a więc przepływa prąd.

**Zadanie 1.3, s. 349: a)** $n = \frac{P \cdot t \cdot \lambda}{h \cdot c} = 3{,}62 \cdot 10^{13}$,

**b)** $I = \frac{0{,}05n \cdot e}{t} = 2{,}90 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{A}$

**Zadanie 2, s. 350:** A

**Zadanie 3.1**, s. 351: BB

**Zadanie 3.2**, s. 351: ok. 1150 razy

**Zadanie 3.3**, s. 351: ≈ 1,1 m

**Zadanie 3.4**, s. 352: C

**Zadanie 4.1**, s. 352: CE

**Zadanie 4.2**, s. 353: ≈ 1,75

**Kod: 8ALDM4**
app.nowaterazmatura.pl
**Rozwiązania zadań 1.–4. dział 15.**

## 16. Elementy fizyki relatywistycznej i fizyka jądrowa

**Zadanie 1.1, s. 375:** Wychodzimy z równości:

$$(mc^2)^2 = \left(\frac{(mc^2)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}}\right)^2 - \left(\frac{mvc}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)}}\right)^2$$

aby pokazać, że $m^2c^4 = m^2c^4$.

**Zadanie 1.2, s. 375:**

$$U = \frac{\sqrt{m^2c^4 + (cp)^2} - mc^2}{e} \approx 91\,000\ \mathrm{V}$$

**Zadanie 2, s. 376:** 1P, 2F, 3F

**Zadanie 3.1, s. 376:** ${}^{1}_{0}n + {}^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{14}_{6}\mathrm{C} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}$

**Zadanie 3.2, s. 377:** 0,089

**Kod: E4EWPK**
app.nowaterazmatura.pl
**Rozwiązania zadań 1.–3. dział 16.**

## Typy zadań maturalnych

### 1. Korzystanie z praw fizyki

**Zadanie 2, s. 392:** $v_{\text{źr2}} = \frac{v_{\mathrm{d}} + 3v_{\text{źr1}}}{4} = 136\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

gdzie $v_{\mathrm{d}}$ – prędkość dźwięku,

$v_{\text{źr1}}$ – prędkość źródła.

**Zadanie 3.1, s. 393:**

$$d_{\text{Gplakat}} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_G}{T_J}\right)^2} \cdot d_{\text{Jplakat}} = 42{,}3 \text{ cm},$$

gdzie $T_J$ – okres obiegu Jasona-3, $T_G$ – okres obiegu satelity geostacjonarnego, $d_{\text{Jplakat}}$ – średnica orbity Jasona-3 na plakacie.

**Zadanie 3.2, s. 393:** $v_{\text{orK}} = v_{\text{orZ}} \cdot \sqrt{\frac{1}{81}} = 0{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$, gdzie $v_{\text{orZ}}$ – prędkość satelity wokół Ziemi.

**Zadanie 4.1, s. 394:** $n_1 = \sqrt{\sin^2 \alpha_{\max} + n_2^2} \approx 1{,}75$

**Zadanie 4.2, s. 394:** $n_1 = \frac{t \cdot c \cdot \cos 26^\circ}{s} \approx 1{,}67$, gdzie $s$ – długość światłowodu, $t$ – czas biegu sygnału w światłowodzie.

**Zadanie 5.1, s. 395:** $v = \sqrt{2gh} \approx 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

**Zadanie 5.2, s. 395:** Siłę działającą na wodę obliczamy jako szybkość zmiany pędu, a objętość wypływającej wody jako iloczyn przekroju otworu oraz długości strumienia wypływającego z prędkością $v$ w czasie $\Delta t$.

**Zadanie 5.3, s. 395:** A. >, B. =, C. =, D. <

**Zadanie 6, s. 395:** C2

Kod: FWYAV8
app.nowaterazmatura.pl
Rozwiązania zadań 1.–6. dział 1.

## 2. Analiza informacji

**Zadanie 1, s. 404:** X – aktyn $^{228}_{89}\text{Ac}$, Y – rad $^{224}_{88}\text{Ra}$

**Zadanie 2, s. 404:** $t = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}7} \cdot 0{,}98 \text{ roku} \approx 4{,}4$ lat

**Zadanie 3, s. 404:** Prawa linia absorpcyjna (w zakresie światła o barwie czerwonej) powstaje w wyniku przejścia elektronu z poziomu energetycznego o numerze **2** na poziom energetyczny o numerze **3** oraz **pochłonięcia** fotonu.

**Zadanie 4.1, s. 405:** 1F, 2P, 3F

**Zadanie 4.2, s. 406:** $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y \cdot v}{3f - 2f} = 0{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$

**Zadanie 5.1, s. 406:** $R = \frac{6U}{5I} = 60\ \Omega$

**Zadanie 5.2, s. 407:** $\frac{\Delta U}{U_1} \cdot 100\% = 25\%$, gdzie $U_1$– odczytane z wykresu napięcie na oporniku dla $\frac{x}{l} = 0{,}5$.

**Zadanie 6, s. 407:** C

**Zadanie 7, s. 407:** B

## 3. Budowa modeli fizycznych

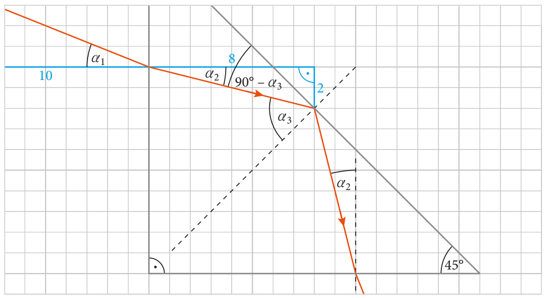
**Zadanie 1.1, s. 418:** B, C, C

**Zadanie 1.2, s. 418:** $\omega_0 = \frac{3v_0}{R} = 12\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

**Zadanie 2.1, s. 419:** Bezwzględna ilość ciepła **pobranego** przez gaz w przemianie AC jest **większa niż** bezwzględna ilość ciepła **pobranego** przez gaz w przemianie AB.

**Zadanie 2.2, s. 419:** $V_X = \sqrt{6} \cdot V_1 \approx 2{,}4 \cdot V_1$

**Zadanie 3, s. 420:**




Korzystamy z prawa załamania, wyznaczamy sinus kąta granicznego, wykorzystujemy zależności pomiędzy kątami w trójkącie i uzyskujemy: $\alpha_3 > \alpha_g$.

**Zadanie 4, s. 420:** A3

**Zadanie 5.1, s. 421:** $U = \frac{m_e(v_k^2 - v_0^2)}{2e} \approx 91$ V

**Zadanie 5.2, s. 421:** Ruch elektronu traktujemy jako złożenie ruchu jednostajnego (w kierunku prostopadłym do linii pola) i ruchu jednostajnie przyspieszonego bez prędkości początkowej (w kierunku równoległym) i wyznaczamy przyspieszenie. Zapisujemy wzór na przyspieszenie elektronu zależne od jego masy i działającej siły. Wyznaczamy energię kinetyczną i zapisujemy wzór na natężenie pola elektrycznego.

## 4. Zadania doświadczalne

**Zadanie 1.1, s. 432:** A3

**Zadanie 1.2, s. 432:** Ładunek kulki jest ujemny.

**Zadanie 2.1, s. 433: 1-**D, **2-**C, **3-**E, **4-**A, **5-**B

**Zadanie 2.2, s. 433:** Uczniowie mierzyli kąt $\alpha_2$.

**Zadanie 3.1, s. 434: 1-**D, **2-**B, **3-**E, **4-**A, **5-**C lub **1-**B, **2-**D, **3-**E, **4-**A, 5-C.

**Zadanie 3.2, s. 434:** $f = \frac{m_s + m_o}{nm_k}$, gdzie

$m_s$ – masa szalki, $m_k$ – masa klocka, $m_o$ – masa odważników, przy jakiej rozpoczyna się ruch klocka lub klocków, $n$ – liczba klocków. Wartości $f$ dla

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: R3Q2Q5**
Rozwiązania zadań 1.–7. dział 2.

app.nowa
terazmatura.pl
**Kod: YLED53**
Rozwiązania zadań 1.–5. dział 3.

kolejnych pomiarów: 0,5, 0,49, 0,51, 0,48, 0,52. Wartość średnia $f$: 0,50.



**Zadanie 3.3, s. 434:** A – działające na klocek siły się równoważą, C – klocek działa na nitkę, a nitka na klocek.

**Zadanie 3.4, s. 435:** 1P, 2F

**Zadanie 4.1, s. 435:** $S=\frac{\pi d^2}{4}\approx 0{,}126\text{ mm}^2$, gdzie $R$ – promień przekroju poprzecznego.

**Zadanie 4.2, s. 435:** $Q_{śr}=m_{śr}g\approx 24{,}7\text{ N}$, gdzie $m_{śr}$ – średnia wartość masy baniaków.

**Zadanie 4.3, s. 436:** $p=\frac{F}{S}\approx 200\text{ MPa}$

**Zadanie 4.4, s. 436:** D

**Zadanie 5.1, s. 436:** Drut oporowy, amperomierz, woltomierz, regulowane źródło napięcia lub regulowany opornik, przewody.

**Zadanie 5.2, s. 436:** Amperomierz należy podłączyć szeregowo z drutem, a woltomierz – równolegle.

**Zadanie 5.3, s. 437:** Skalujemy odpowiednio osie. Po naniesieniu punktów pomiarowych rysujemy prostokąty niepewności o bokach odpowiednio 0,004 A i 0,4 V. Rysujemy krzywą przechodzącą przez środki punktów pomiarowych.

**Zadanie 5.4, s. 437:** 1F, 2F, 3P

**Zadanie 6, s. 437:** $\frac{I_V}{I_R}=\frac{U_V}{I_R\cdot R_V}=7\%$

## 5. Zadania przekrojowe



**Zadanie 1.1, s. 446:** $\frac{T_A}{T_B}=\frac{V_A}{V_B}=1{,}2$

**Zadanie 1.2, s. 446:** 1F, 2P, 3F

**Zadanie 1.3, s. 447:** $p_A=\frac{m}{\mu}\cdot\frac{RT_A}{V_A}=1{,}02\cdot 10^5\text{ Pa}$

**Zadanie 1.4, s. 447:** $S=\frac{Q}{p_A-p_{atm}}=200\text{ cm}^2$

**Zadanie 1.5, s. 447:** B

**Zadanie 2.1, s. 448:** $\vec{F}_1$ – D, $\vec{F}_2$ – B, $\vec{F}_3$ – A

**Zadanie 2.2, s. 448:** $n=\frac{q}{e}=2\cdot 10^7$

**Zadanie 2.3, s. 448:** $\frac{W_g}{W_e}=\frac{mg}{Eq}\approx 8\text{ mln}$

**Zadanie 2.4, s. 449:** B

**Zadanie 2.5, s. 449:** A3

**Zadanie 3.1, s. 450:** Im większa jest praca wyjścia, tym mniejszą energię kinetyczną uzyskują elektrony wybite z metalu przez promieniowanie o danej częstotliwości, większej od częstotliwości granicznej. Wynika to z równania: $E_k=hf-W$, gdzie: $E_k$ – maksymalna energia kinetyczna, $h$ – stała Plancka, $f$ – częstotliwość promieniowania, $W$ – praca wyjścia.

**Zadanie 3.2, s. 450:** A, D, E

**Zadanie 3.3, s. 451:** Obliczamy częstotliwość graniczną, ponieważ znamy pracę wyjścia $W$ z cezu. Przeliczamy pracę wyjścia na dżule. Powyżej częstotliwości granicznej zależność maksymalnej energii kinetycznej elektronów od częstotliwości jest liniowa. Dla dowolnej częstotliwości większej od częstotliwości granicznej obliczamy maksymalną energię kinetyczną. Obliczamy energię dla fali o długości podanej w treści zadania, czyli $\lambda = 500$ nm.

**Zadanie 3.4, s. 451:** Katoda fotokomórki powinna być podłączona do minusa, a anoda – do plusa.

**Zadanie 3.5, s. 451:** $U=\frac{E_k}{e}\approx 0{,}625\text{ V}$

**Zadanie 3.6, s. 452:** C, E

**Zadanie 3.7, s. 452:** Wzrost natężenia światła oznacza, że w jednostce czasu na płytkę pada więcej fotonów, a każdy foton może wybić jeden elektron, zatem liczba elektronów opuszczających fotokatodę rośnie.

**Zadanie 3.8, s. 452: A:** $f_1=f_2$, $I_1<I_2$, $|U_{h1}|=|U_{h2}|$, $I_{max1}<I_{max2}$;
**B:** $f_1<f_2$, $I_1<I_2$, $|U_{h1}|<|U_{h2}|$, $I_{max1}=I_{max2}$

## 6. Analiza tekstów popularnonaukowych

**Zadanie 1.1, s. 460:** 1. Zerowy opór właściwy poniżej określonej temperatury. 2. Wypychanie pola magnetycznego.

**Zadanie 1.2, s. 460:** 1P, 2F, 3F

**Zadanie 1.3, s. 460:** przewodnik a), nadprzewodnik c)

**Zadanie 1.4, s. 461:** Ferromagnetyki – silnie przyciągane przez magnes. Paramagnetyki – słabo przyciągane przez magnes. Diamagnetyki – słabo odpychane przez magnes.

**Zadanie 2.1, s. 461:** 1F, 2P, 3P

# 2. Dodatki matematyczne

**Obejrzyj film**

app.nowa terazmatura.pl
**Kod: 8DC2JY**
Tutorial: **Wektory**

## 1. Działanie na wektorach

### DODAWANIE WEKTORÓW

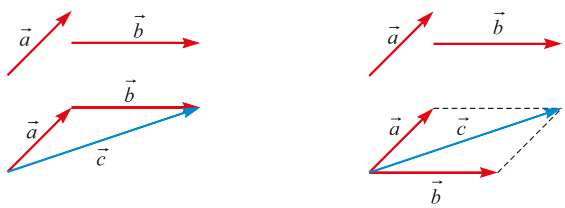
- o tym samym kierunku i zgodnych zwrotach


$\vec c = \vec a + \vec b$

- o tym samym kierunku i przeciwnych zwrotach


$\vec c = \vec a + \vec b$

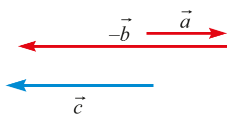
- o różnych kierunkach




$\vec c = \vec a + \vec b$ $\qquad$ $\vec c = \vec a + \vec b$

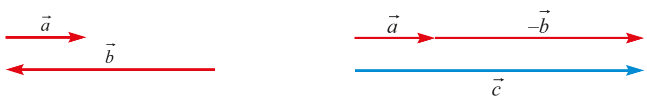
### ODEJMOWANIE WEKTORÓW

- o tym samym kierunku i zgodnych zwrotach




$\vec c = \vec a - \vec b$

- o tym samym kierunku i przeciwnych zwrotach

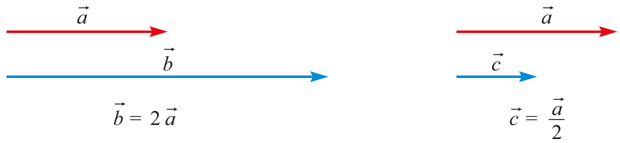



$\vec c = \vec a - \vec b$

- o różnych kierunkach


$\vec c = \vec a - \vec b = \vec a + (-\vec b)$

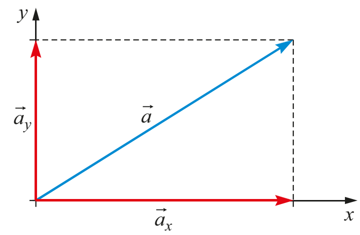
### MNOŻENIE I DZIELENIE WEKTORA PRZEZ LICZBĘ




### ROZKŁAD WEKTORA NA SKŁADOWE

Wektor $\vec{a}$ rozłożyliśmy na składowe $\vec{a}_x$ i $\vec{a}_y$.

W przedstawionym obok przykładzie są one prostopadłe do siebie.




### ILOCZYN SKALARNY

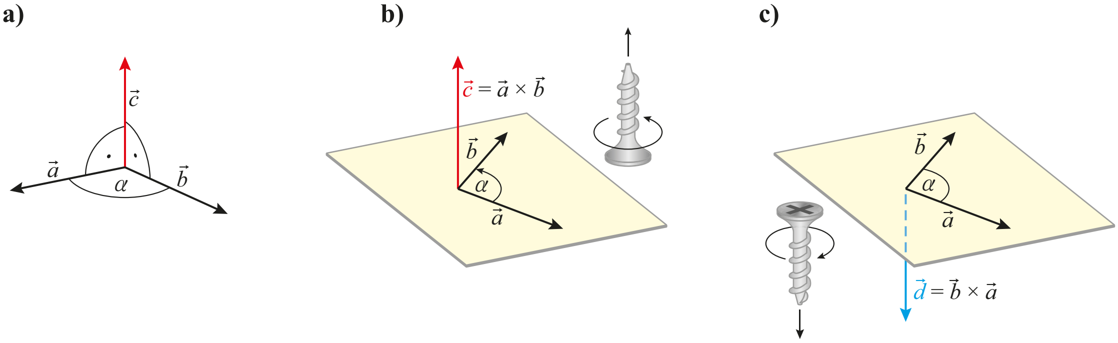
Iloczyn skalarny dwóch wektorów $c = \vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ jest skalarem (liczbą) o wartości $c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$, gdzie kąt $\alpha$ jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

### ILOCZYN WEKTOROWY WRAZ Z REGUŁĄ ŚRUBY PRAWOSKRĘTNEJ

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jest wektorem (rys. a), którego kierunek i zwrot określa reguła śruby prawoskrętnej (rys. b), a wartość $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$, gdzie kąt $\alpha$ jest kątem między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej iloczyn wektorowy $\vec{b} \times \vec{a}$ (rys. c) jest wektorem przeciwnym do $\vec{a} \times \vec{b}$, czyli $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ (porównaj rys. b i c).

**a)** **b)** **c)**

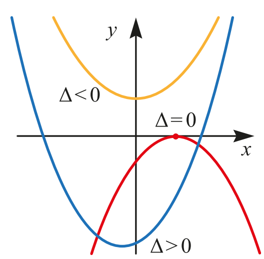



## 2. Równanie kwadratowe

Równanie postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

gdzie $a, b, c \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$, nazywamy **równaniem kwadratowym**.




Rozwiązania równania kwadratowego w zależności od **wyróżnika** tego równania, który ma postać:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

przedstawiono w tabeli.

| $\Delta = 0$ | $\Delta > 0$ | | $\Delta < 0$ |
|---|---|---|---|
| $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ | $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ | brak rozwiązań rzeczywistych |

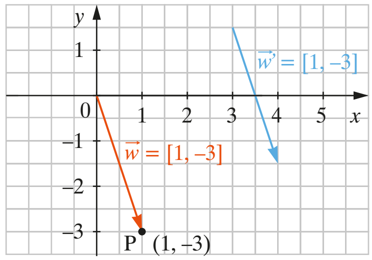
## 3. Współrzędne wektora na płaszczyźnie

Gdy na płaszczyźnie wprowadzimy układ współrzędnych, także wektory możemy opisywać za pomocą współrzędnych. Dla odróżnienia od współrzędnych punktów zapisujemy je w nawiasach kwadratowych.

Gdy wektor ma początek w początku układu współrzędnych, współrzędne wektora równe są współrzędnym jego końca (patrz rys. a).

Wektor $\vec{w}$ zaczepiony w początku układu współrzędnych ma współrzędne [1, –3]. Takie same współrzędne ma wektor $\vec{w}'$, gdyż $\vec{w} = \vec{w}'$.

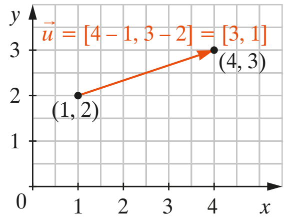
**a)**




Współrzędne dowolnego wektora można obliczyć, odejmując od współrzędnych końca odpowiednie współrzędne początku (patrz rys. b).

Wektor $\vec{u}$ o współrzędnych [3, 1] zaczepiony w punkcie (1, 2) ma koniec w punkcie (4, 3).

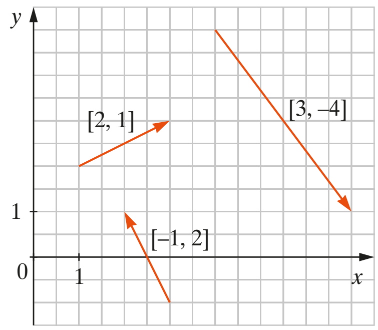
**b)**




Zwróć uwagę, że współrzędne wektora mają intuicyjną interpretację. Wartość bezwzględna współrzędnej wskazuje, o ile jednostek mamy się poruszyć wzdłuż danej osi, a znak – w którą stronę (znak plus to ruch zgodnie ze zwrotem osi, znak minus to ruch przeciwny do zwrotu osi).

Wektory narysowane w układzie współrzędnych na rysunku c) można odczytać następująco: wektor [2, 1] to wektor „2 w prawo, 1 w górę”, wektor [–1, 2] to wektor „1 w lewo, 2 w górę”, a wektor [3, –4] to wektor „3 w prawo, 4 w dół”.

**c)**



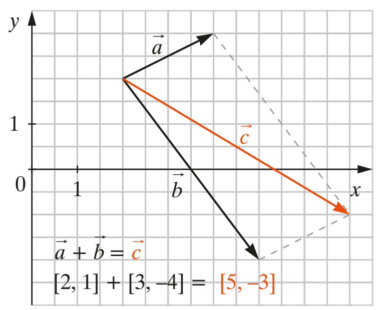

## 4. Działania na wektorach a działania na ich współrzędnych

Dodawaniu i odejmowaniu wektorów oraz ich mnożeniu przez liczbę odpowiadają analogiczne działania na ich współrzędnych:

$$[x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y']$$

$$[x, y] - [x', y'] = [x - x', y - y']$$

$$a[x, y] = [ax, ay].$$




Na rysunku obok widzisz, że wektor $\vec{c}$, będący sumą wektorów $\vec{a} = [2, 1]$ i $\vec{b} = [3, -4]$, wyznaczony za pomocą reguły równoległoboku, rzeczywiście ma współrzędne $\vec{c} = [5, -3]$.

Wektor $\vec{c}$, wyznaczony za pomocą reguły równoległoboku, jest sumą wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

## 5. Miara łukowa kąta – radiany

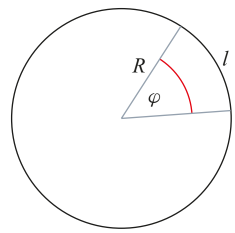
**Radian** to jednostka miary łukowej kąta zaliczana do jednostek pomocniczych układu SI.

Miara łukowa kąta pozwala wyrazić wielkość kąta za pomocą długości łuku okręgu.
Kąt ma miarę jednego radiana, jeśli jest kątem środkowym opartym na łuku długości promienia, czyli kąt jednego radiana odpowiada łukowi okręgu o długości $R$.

Kąt pełny (360°) ma zatem $2\pi$ radianów, a kąt półpełny (180°) ma $\pi$ radianów.

Kąt prosty (90°) ma $\frac{\pi}{2}$ radianów.

$$\mathbf{1\ radian} = \frac{\mathbf{360°}}{\mathbf{2\pi}} \approx \mathbf{57{,}3°}.$$



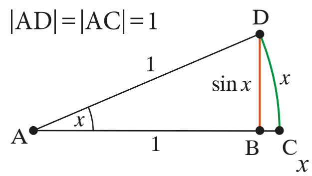

Radiany oznacza się skrótem rad. **Długość *l* łuku okręgu** wiąże się z miarą łukową kąta $\varphi$ w następujący sposób:

$$\boldsymbol{l = \varphi R}, \text{ czyli } \boldsymbol{\varphi = \frac{l}{R}}$$

gdzie $R$ jest promieniem okręgu.

## 6. Przybliżenie sin $x \approx x$ dla małych kątów w mierze łukowej

Rysunek przedstawia wycinek koła o promieniu 1 i kącie $x$.



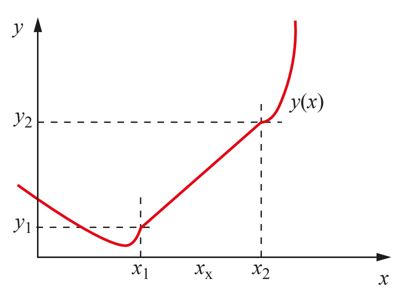

Miara łukowa kąta $x$ jest liczbowo równa długości łuku CD, natomiast jego sinus – długości odcinka BD. Dla niewielkich kątów różnica między $x$ oraz $\sin x$ jest bardzo mała. Zajrzyj do tabeli poniżej. W kolumnie „błąd względny” podano, o ile procent różni się $x$ (w radianach) od $\sin x$ (wartość wyrażenia $\frac{x - \sin x}{\sin x} \cdot 100\%$).

| $x$ [stopnie] | $x$ [rad] | $\sin x$ | BŁĄD WZGLĘDNY PRZYBLIŻENIA W % |
|---|---|---|---|
| 50 | 0,872665 | 0,766044 | 14 |
| 20 | 0,349066 | 0,342020 | 2 |
| 10 | 0,174533 | 0,173648 | 0,5 |
| 5 | 0,087266 | 0,087156 | 0,13 |
| 3 | 0,052360 | 0,052335 | 0,05 |
| 2 | 0,034907 | 0,034899 | 0,02 |
| 1 | 0,017453 | 0,017452 | 0,005 |

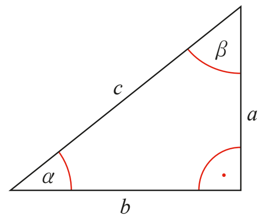
## 7. Interpolacja liniowa

Jeżeli funkcja $y(x)$ między punktami $(x_1, y_1)$ i $(x_2, y_2)$ jest liniowa oraz $x_x$ leży pomiędzy $x_1$ i $x_2$, to wartość funkcji $y$ w punkcie $x_x$ wynosi:

$$\boldsymbol{y(x_x) = y_x + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_x - x_x)}$$



## 8. Funkcje trygonometryczne i ich własności




$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin 2\alpha \qquad \sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$

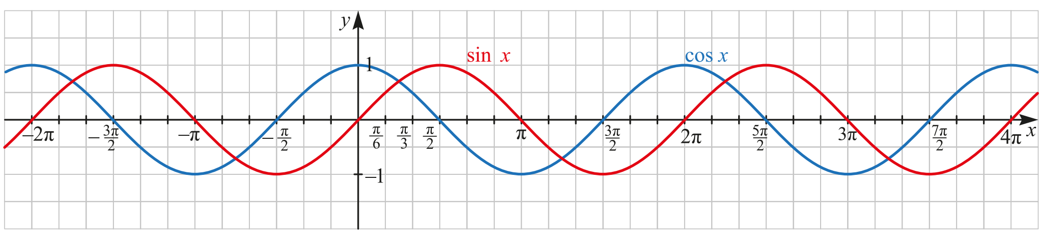
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

- **Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów**

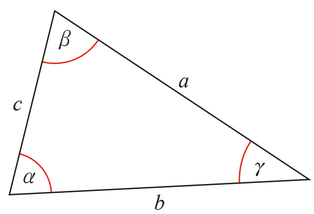
| | $0°$ | $30° = \frac{\pi}{6}$ | $45° = \frac{\pi}{4}$ | $60° = \frac{\pi}{3}$ | $90° = \frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | – |

- **Wykresy funkcji sinus i cosinus**




- **Twierdzenie cosinusów**

Dla dowolnego trójkąta na płaszczyźnie zachodzą związki:




$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

## 9. Logarytmy

Logarytmem dodatniej liczby $c$ przy podstawie $a$ nazywamy wykładnik $b$ potęgi, do jakiej należy podnieść podstawę $a$, aby otrzymać liczbę $c$:

$$\log_a c = b \quad \text{to} \quad a^b = c$$

Na przykład $\log_2 8 = 3$, bo $2^3 = 8$

**Uwaga.** Skrótowe zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

Własności logarytmu:

dla $x > 0$, $y > 0$ i $a > 0$ oraz $a \neq 0$ mamy:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \qquad \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

## 10. Sumy indeksowane

Wyrażenie $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ to zapis za pomocą sumy indeksowanej. Oznacza, że należy dodać wszystkie wyrażenia o indeksach od $i = 1$ do $i = n$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n$$

Dzięki temu zapisowi można dużo prościej zapisać wzory, w których pojawia się dodawanie wyrażeń powiązanych różnymi zależnościami, np.:

- zapis wyrażenia na opór zastępczy pięciu oporników o indeksach od $R_1$ do $R_5$:

$$\frac{1}{R_z} = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

- zapis wyrażenia na moment bezwładności czterech mas punktowych, każda znajdująca się w innej odległości od osi obrotu:

$$I = \sum_{i=1}^{4} m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot r_2^2 + m_3 \cdot r_3^2 + m_4 \cdot r_4^2$$

# 3. Tabele

Tabela 1. Jednostki wielkości fizycznych

| | WIELKOŚCI FIZYCZNA | NAZWA JEDNOSTKI I SYMBOL | JEDNOSTKA WYRAŻONA W JEDNOSTKACH PODSTAWOWYCH UKŁADU SI |
|---|---|---|---|
| JEDNOSTKI PODSTAWOWE | czas | sekunda, s | [s] |
| | długość | metr, m | [m] |
| | liczność materii | mol, mol | [mol] |
| | masa | kilogram, kg | [kg] |
| | natężenie prądu elektrycznego | amper, A | $\left[\frac{C}{s}\right]$ |
| | temperatura | kelwin, K | [K] |
| JEDNOSTKI POCHODNE | ciepło | dżul, J | $\left[N \cdot m = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right]$ |
| | ciepło molowe | – | $\left[\frac{J}{mol \cdot K}\right]$ |
| | ciepło parowania | – | $\left[\frac{J}{kg}\right]$ |
| | ciepło topnienia | – | $\left[\frac{J}{kg}\right]$ |
| | ciepło właściwe substancji | – | $\left[\frac{J}{kg \cdot K}\right]$ |
| | ciśnienie | paskal, Pa | $\left[\frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}\right]$ |
| | częstotliwość | herc, Hz | $\left[\frac{1}{s}\right]$ |
| | energia | dżul, J | $\left[J = kg \cdot \frac{m^2}{s^2}\right]$ |
| | | elektronowolt, eV | $[1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J]$ |
| | gęstość | – | $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ |
| | gęstość prądu | – | $\left[\frac{A}{m^2}\right]$ |
| | indukcja magnetyczna | tesla, T | $\left[\frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m}\right]$ |
| | indukcyjność | henr, H | $\left[\frac{Wb}{A}\right]$ |
| | kąt | radian, rad | [rad] |
| | ładunek elektryczny | kulomb, C | $[A \cdot s]$ |
| | masa molowa | – | $\left[\frac{g}{mol}\right]$ |
| | moc | wat, W | $\left[\frac{J}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s^3}\right]$ |
| | moment bezwładności | – | $[kg \cdot m^2]$ |
| | moment pędu | – | $\left[kg \cdot \frac{m^2}{s}\right]$ |

Nowa
# teraz matura

I wiesz, jak zdać maturę

nowa era
Twoje mocne strony

**ZBIÓR ZADAŃ MATURALNYCH**
ćwiczenie rozwiązywania zadań
i arkuszy maturalnych

**VADEMECUM**
powtarzanie wiadomości
połączone z rozwiązywaniem
zadań typu maturalnego


**CYFROWE WSPOMAGANIE NAUKI**

- **APLIKACJA** – materiały cyfrowe zintegrowane z Vademecum i Zbiorem zadań maturalnych ułatwiające przygotowania do egzaminu
  *app.nowaterazmatura.pl*
- **SERWIS MATURALNY** – wszystkie niezbędne informacje o maturze
  *nowaterazmatura.pl*

Nowa Era Sp. z o.o.
www.nowaera.pl nowaera@nowaera.pl
Centrum Kontaktu: 58 721 48 00

ISBN 978-83-267-5116-5